ポテンシャルの導出

Maxwell 方程式に Lorentz 条件を課すと、ポテンシャル ϕ に対して以下の波動方程式が得られます。

$$\Box\phi(x_a, t) = -\frac{\rho(x_a, t)}{\epsilon_0}, \quad \Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \tag{1.1}$$

これを解くために、ポテンシャル ϕ と電荷密度 ρ を時間 t に関してフーリエ変換します。

$$\begin{aligned}\phi(x_a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\phi_\omega(x_a)e^{-i\omega t}d\omega, \\ \rho(x_a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\rho_\omega(x_a)e^{-i\omega t}d\omega.\end{aligned} \tag{1.2}$$

逆変換は以下で与えられます。

$$\begin{aligned}\phi_\omega(x_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_a, t)e^{i\omega t}d\omega, \\ \rho_\omega(x_a) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x_a, t)e^{i\omega t}d\omega,\end{aligned} \tag{1.3}$$

これを (1.1) に代入すると、次の式が得られます。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\phi_\omega(x_a) = -\frac{\rho_\omega(x_a)}{\epsilon_0}. \tag{1.4}$$

この式を解くために、グリーン関数の方法を使いましょう。グリーン関数 G は、以下の式を満たすものとして定義されます。

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(x_a, y_a) = -\delta^{(3)}(x_a - y_a). \tag{1.5}$$

ここで、左辺の ∇ は x_a に関する微分で、y_a には作用しないものとします。もし G がどういう関数かが、何らかの方法で分かったとしましょう。すると求めたい ϕ_ω は、

$$\phi_\omega(x_a) = \frac{1}{\epsilon_0}\int d^3y_a\rho_\omega(y_a)G(x_a, y_a), \tag{1.6}$$

であることが分かります。実際、この形を (1.4) に代入すれば満たされていることがすぐに分かります。従って、(1.4) を解くという問題は、(1.5) を満たす G を見つける問題に帰着したわけです。これがグリーン関数の方法です。

グリーン関数は、$x_a - y_a$ にのみ依存します。これは (1.5) を満たす $G(x_a, y_a)$ が見つかったとすると、$G(x_a + c_a, y_a + c_a)$ も同じ式を (1.5) 満たすことから分かります（定義式

の並進（平行移動）対称性)。これより、グリーン関数は $G(x_a, y_a)$ と書くより、$G(x_a - y_a)$ と書いたほうが良いことが分かります。

さらにグリーン関数は二点間の距離 $|x_a - y_a|$ にしかよらないことも分かります。これは上の平行移動の対称性の議論を、今度は回転に対する対称性に対して行ってやれば理解できます。つまり、$x_a - y_a$ というベクトルをくるくる回転させたときに、方程式の形は変わりません（回転不変性）。以上より、グリーン関数は $G(|x_a - y_a|)$ の形であることが分かりました。

さて、$r = |x_a - y_a|$ と書きましょう。$r \neq 0$ のとき、(1.5) は点 y を中心とする極座標で

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rG(r))}{dr^2} + k^2 G(r) = 0, \quad k \equiv \omega/c \tag{1.7}$$

となります。この式は簡単に積分できて、

$$G(r) = \frac{A}{r}e^{\pm ikr} \tag{1.8}$$

の形が解になっています。ここで A は定数です。

定数 A を決めましょう。グリーン関数の式 (1.5) に、今見つけた解 (1.18) を代入して、両辺を x_a で積分してみましょう。ここで、積分領域は点 y_a を中心とする半径 ϵ の球の内部とします。この半径は非常に小さい $\epsilon \ll 1$ としましょう。右辺は簡単に積分できて、

$$-\int d^3x_a \delta^{(3)}(x_a - y_a) = -1. \tag{1.9}$$

左辺は今の積分領域で $r \ll 1$ であることに注意すると、

$$\int d^3x_a \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(|x_a - y_a|) \simeq \int d^3x_a \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{A}{r} \tag{1.10}$$

とできます。右辺の第二項は、極座標で評価すると

$$\int \frac{\omega^2}{c^2}\frac{A}{r} d^3x_a = \frac{\omega^2 A}{c^2} 4\pi \int_0^\epsilon dr r^2 \frac{1}{r} = \frac{2\pi\omega^2 A}{c^2}\epsilon^2 \tag{1.11}$$

となって、ϵ が非常に小さいときは無視できることが分かります。一方で (1.10) の一項目はガウスの定理を使って、

$$\int d^3x_a \nabla \cdot \nabla \frac{A}{r} = \int \left(\vec{\nabla}\frac{A}{r}\right) \cdot d\vec{S}|_{r=\epsilon} \tag{1.12}$$

となります。ここで右辺は微小球の表面での積分です。これを評価すると

$$\int d^3x_a \nabla^2 \frac{A}{r} = -4\pi A \tag{1.13}$$

と分かります。以上より $\epsilon \to 0$ のとき $-4\pi A = -1$、つまり

$$A = \frac{1}{4\pi} \tag{1.14}$$

が分かりました。

従って G の表式は

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r} e^{\pm ikr} \tag{1.15}$$

となりました。これを用いて ϕ_ω を求めると

$$\phi_\omega(x_a) = \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3 y_a \rho_\omega(y_a) G(x_a, y_a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 y_a \frac{\rho_\omega(y_a)}{|x_a - y_a|} e^{\pm ik|x_a - y_a|}. \tag{1.16}$$

フーリエ変換する前の変数で見ると、

$$\begin{aligned}\phi(x_a, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \phi_\omega(x_a)^{-i\omega t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\omega d^3 y_a \frac{\rho_\omega(y_a)}{|x_a - y_a|} e^{-i\omega t \pm ik|x_a - y_a|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 y_a \frac{\rho(y_a, t \pm |x_a - y_a|/c)}{|x_a - y_a|}\end{aligned} \tag{1.17}$$

となります。この式は (x_a, t) におけるポテンシャルが、$(y_a, t \pm |x_a - y_a|/c)$ における電荷によって決まることを意味しています。因果律から考えて、$t + |x_a - y_a|/c$ の解は不自然（未来の電荷によって過去が決まっている）なので棄却すると、結局解は以下で与えられます。

$$\phi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 y_a \frac{\rho(y_a, t - |x_a - y_a|/c)}{|x_a - y_a|}. \tag{1.18}$$

時間変動する電気双極子の場合

電気双極子で二つの電荷の大きさが $q_0 \sin(\omega t)$ のように時間によって変化する場合を考えましょう。二つの電荷は、点 $p_a = (d/2, 0, 0)$ および $-p_a = (-d/2, 0, 0)$ にあるとします。このとき電荷密度は

$$\rho(y_a, t) = q_0 \delta^{(3)}(y_a - p_a) \sin(\omega t) - q_0 \delta^{(3)}(y_a + p_a) \sin(\omega t) \tag{1.19}$$

これを (1.18) に代入すると

$$\phi(x_a, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 y_a \frac{1}{|x_a - y_a|} \left[q_0 \delta^{(3)}(y_a - p_a) \sin(\omega(t - |x_a - y_a|/c)) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad -q_0\delta^{(3)}(y_a+p_a)\sin(\omega(t-|x_a-y_a|/c))\Big] \\
&= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\sin(\omega(t-r_1/c))}{r_1}-\frac{\sin(\omega(t-r_2/c))}{r_2}\right]. \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

ただしここで、

$$
r_1=\sqrt{(x_1-d/2)^2+x_2^2+x_3^2}, \qquad r_2=\sqrt{(x_1+d/2)^2+x_2^2+x_3^2} \qquad (1.21)
$$

としました。