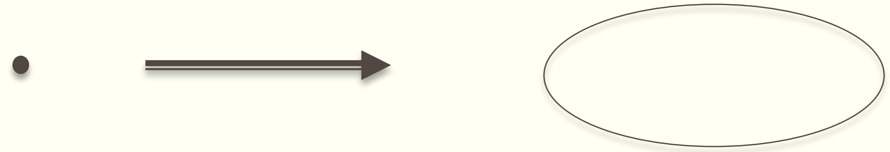
THE FOKKER-PLANCK FORMALISM FOR CLOSED STRINGS

石橋　延幸（素粒子理論研究室）
CHoU構成員会議 2022年11月28日

超弦理論

- 素粒子は点ではなく、長さを持った弦のようなものである



- この仮説から出発して（矛盾がないように）理論を作ると、
  - 理論は重力を含む
  - 点粒子の場の理論にいつも現れる紫外発散がない

- このアイディアに基づいて、重力を含んだ素粒子の統一理論を作ろう（1984～）

方程式・作用

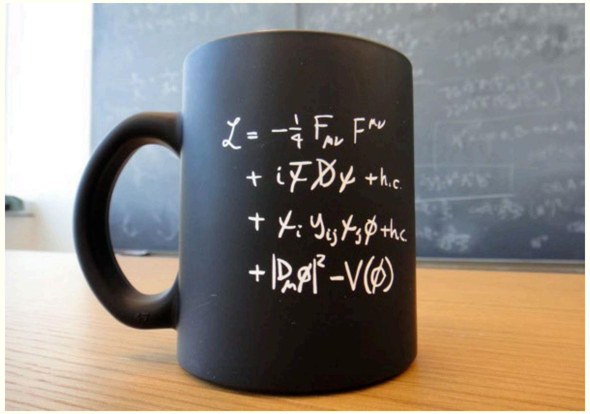
- 物理では、理論があればそれを表す方程式・作用がある
  - 力学

$$m\frac{d^2x^i}{dt^2} = f^i$$

  - 量子力学

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$$

  - 標準模型



- 電磁気学

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$$
$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

- 一般相対論

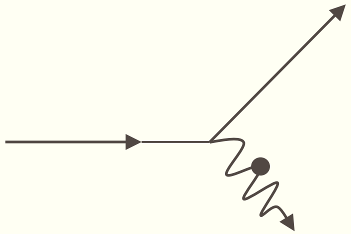
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

超弦理論を表す方程式･作用とは何か？

点粒子

作用 → ファインマングラフ

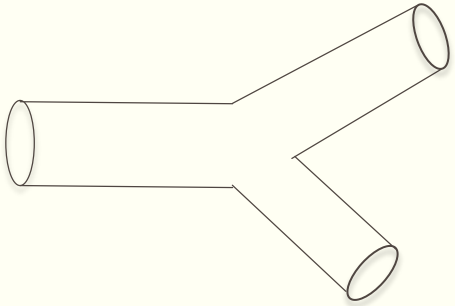
$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \right]$$



弦

作用 → ファインマングラフ

？



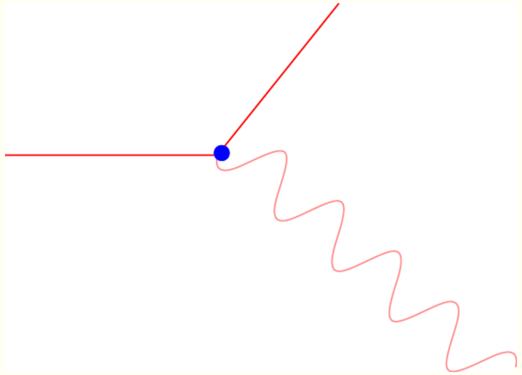
弦のファインマングラフを導き出す作用は何か？

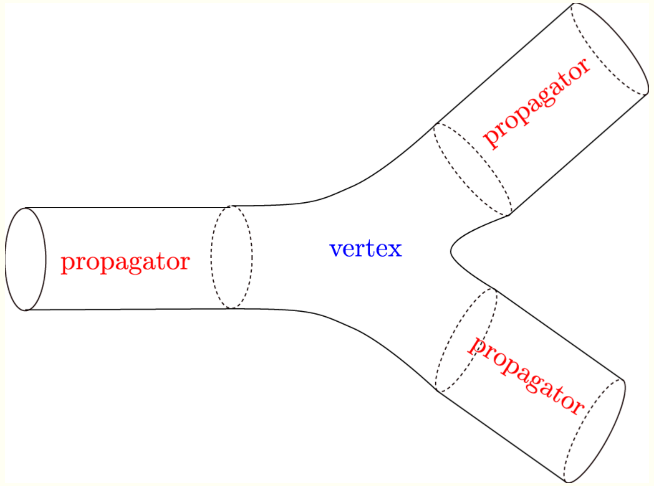
この問題は難しい

- Propagatorとvertex

$$S=\int d^4x\left[\underline{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}+\underline{\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi}-\underline{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}\right]$$

$$S=\underline{\Phi^2}+\underline{g_s\Phi^3}+\cdots$$

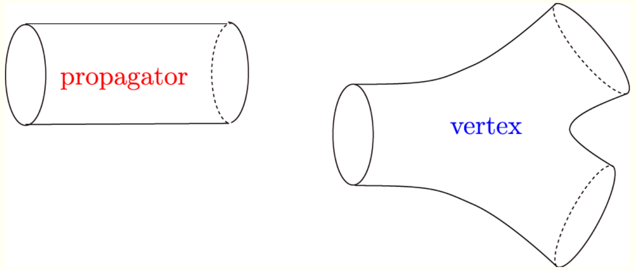




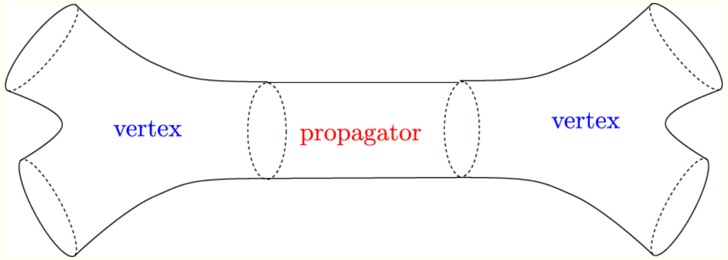
- 弦の世界面を分割するルールを決めなければならない
- やみくもにやると、非常に複雑な作用になってしまう

やみくもにやるとどうなるか？

- Propagatorと3点相互作用から出発
  - vertexは 3 点振幅を再現するように決める

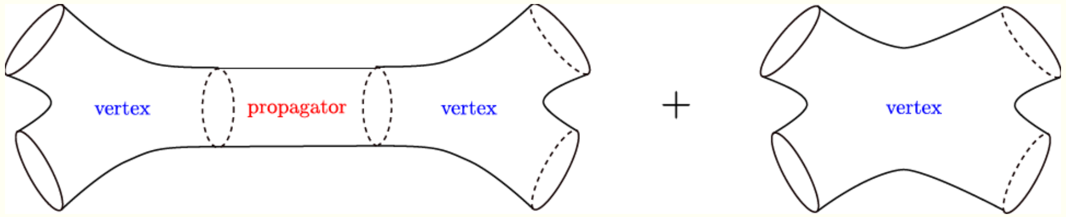


  - これらを用いて 4 点振幅を計算する



  - やみくもにやると弦理論の 4 点振幅とは一致しない

- 4点振幅が正しく出るように、4点相互作用を理論に加える



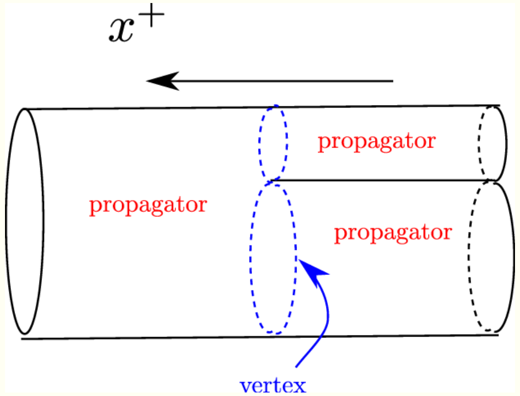
  - この操作が際限なく続く

- 作用は無限個の相互作用を含み、収拾がつかなくなる

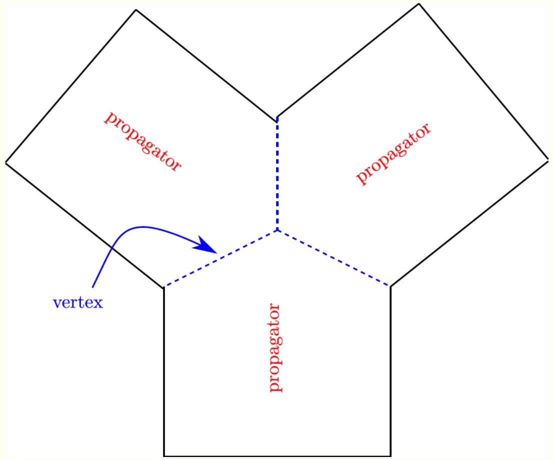
$$S = \Phi^2 + g_s\Phi^3 + g_s^2\Phi^4 + \cdots$$

「やみくも」でないやり方

- Light-cone gauge (Kaku-Kikkawa 1974)



- Witten(1986)



- ボゾン弦については、これらを使って簡単な弦理論の作用を作ることができる

$$S = \Phi^2 + g_s \Phi^3$$

- これらのルールを用いて超弦理論の作用を作るのは不可能(1986)
  - 発散してしまう(spurious singularity)

超弦理論を記述する簡単な方程式・作用は見つかっていない

- 方程式・作用は理論の解析に必要
  - 非摂動効果
- 方程式・作用なしで、超弦理論研究者はなぜ平気なのか？
  - 現在、多くの超弦理論研究者は、超弦理論は次のような作用で記述できると考えている
    - 行列模型

$$I = \int dt \mathrm{Tr} \left[\frac{1}{2}(\dot{X}^i)^2 - \frac{1}{4}([X^i, X^j])^2 + \cdots \right]$$

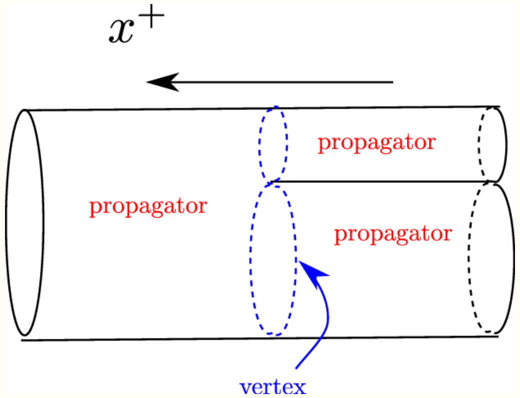
    - ゲージ理論（ゲージ/重力対応）

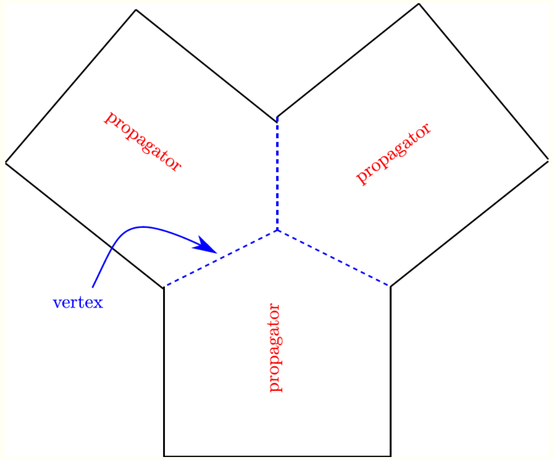
$$I = \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} \mathrm{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \cdots \right]$$

  - これらが超弦理論を記述するだろうという予想がある

- 弦理論自身の作用は何か？を研究する分野を「弦の場の理論」と呼ぶ
  - 弦の場の理論の研究者たちは無限個の相互作用をどう取り扱うかを研究している（homotopy代数）

弦の世界面を分割する新しいルール





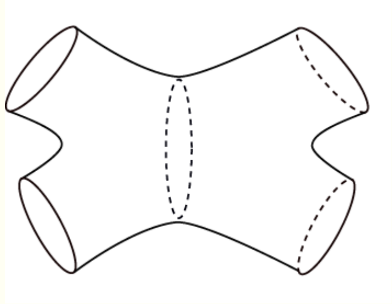
- これらのルールは超弦理論には向いていない
- 新しいルールを作りたい
  - 弦理論の世界面はリーマン面と呼ばれる数学の概念で記述される
  - 数学ではリーマン面をパンツに分解する方法が古くから知られている
  - この pants decomposition を用いて弦理論の作用を作った
    arXiv:2210.04134

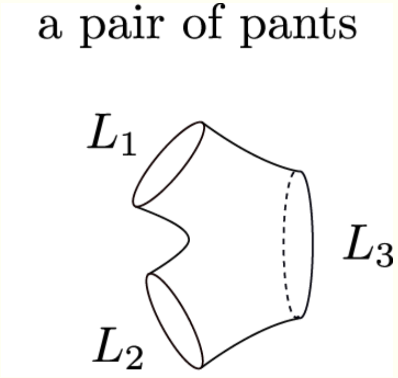
目次

1. Pants decomposition
2. Fokker-Planck formalism
3. まとめ

1. Pants decomposition

- 弦理論の世界面は pants に分解することができる



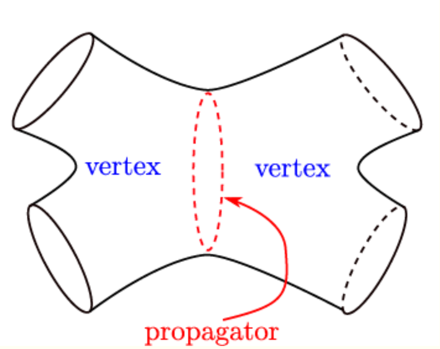


- 弦理論の世界面の上に
    - 曲率一定
    - 境界が測地線

  となるような計量を一意的に定めることができる
- 世界面をすべての境界が測地線になっているような pants で分解することができる

- この分解を用いて弦の作用を作ろう

これはうまくいかない

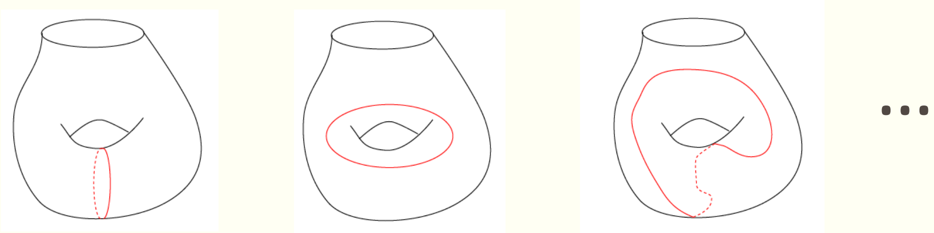


- Pants decompositionを用いれば、弦の世界面を propagator と3点相互作用に分解できる
- この分解をもとに、弦理論の簡単な作用を作ることができるのではないか？

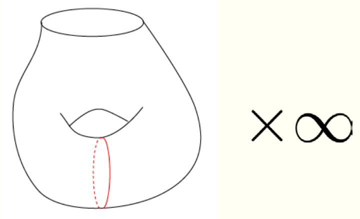
$$S = \Phi^2 + g_s \Phi^3$$

- これはうまくいかない（D'Hoker-Gross 1987）

- Pants decompositionは一意的ではない



- 作用 $S = \Phi^2 + g_s \Phi^3$ から出発してこのグラフを計算すると、これらすべてのpants decompositionの寄与を足したものになり、発散してしまう



最近の進展

- ２次元の量子重力理論 JT gravity の理論の研究が進展
- JT gravityの理論は、0次元の弦理論と関係している

弦理論のファインマングラフの「数」を数える理論

↕

「リーマン面の形」の空間の体積

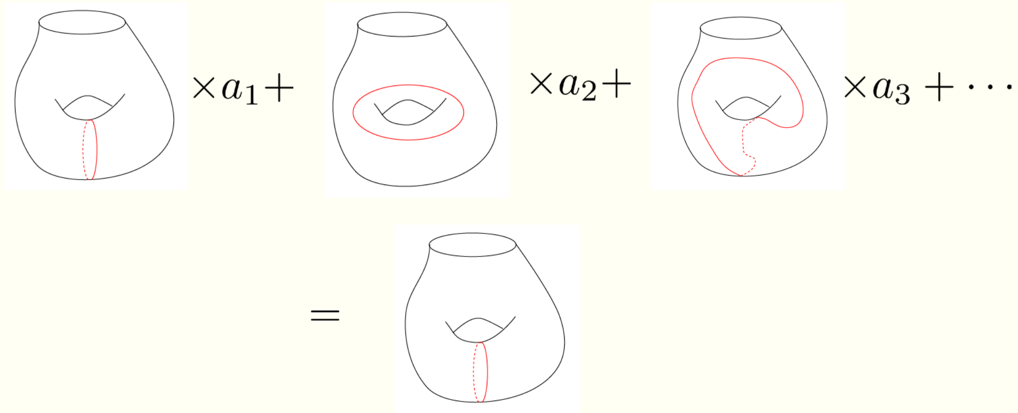
↕

リーマン面のmoduli spaceの体積

- この体積はMirzakhaniによって、pants decompositionを用いて計算されていた（2007）

- Mirzakhaniのアイデア

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$$



- このアイデアをボゾン弦理論の場合に拡張する
- 理論はFokker-Planck formalismを用いて記述しなければならない

2. Fokker-Planck formalism

- 場の理論の経路積分表示(Euclidean time)

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \frac{\int[d\phi]e^{-S[\phi]}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)}{\int[d\phi]e^{-S[\phi]}}$$

- この系は以下の確率密度を用いて記述される

$$P[\phi] = \frac{e^{-S[\phi]}}{\int[d\phi]e^{-S[\phi]}}$$

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \int[d\phi]P[\phi]\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,,$$

- Fokker-Planck formalism
  - この系を以下の量子力学系を用いて記述する
  - fictitious time τ
  - Fokker-Planck Hamiltonian H_{FP}

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}P[\phi,\tau] = H_{\mathrm{FP}}P[\phi,\tau]$$

$$H_{\mathrm{FP}} = -\int dx\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\right)$$

  - $\tau\to\infty$ の極限では基底状態 $E=0$ が実現される

$$\lim_{\tau\to\infty}P[\phi,\tau] = P[\phi]$$

Fokker-Planck formalism

$$\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \int [d\phi] P[\phi]\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,,$$

$$P[\phi] = \frac{e^{-S[\phi]}}{\int [d\phi] e^{-S[\phi]}}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\tau} P[\phi,\tau] = H_{\mathrm{FP}} P[\phi,\tau]$$

$$H_{\mathrm{FP}} = -\int dx \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)}\right)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} P[\phi,\tau] = P[\phi]$$

- Operator formalism

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}(x), \hat{\phi}(y)] &= \delta(x-y) \\ [\hat{\pi}(x), \hat{\pi}(y)] &= [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0 \end{aligned}$$

$$P[\phi,\tau] = \langle\phi| e^{-\tau \hat{H}_{\mathrm{FP}}} |0\rangle$$

$$\hat{H}_{\mathrm{FP}} = -\int dx \left(\hat{\pi}(x) - \frac{\delta S}{\delta\phi(x)}[\hat{\phi}]\right)\hat{\pi}(x)$$

$$\frac{e^{-S[\phi]}}{\int [d\phi] e^{-S[\phi]}} = \lim_{\tau\to\infty} \langle\phi| e^{-\tau \hat{H}_{\mathrm{FP}}} |0\rangle$$

Fokker-Planck formalism for closed bosonic strings

- pants decompositionを用いてボゾン弦理論の作用を作ろうとしてもうまくいかないが、Fokker-Planck Hamiltonianは作ることができる

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\mathrm{FP}} &= \int_0^\infty dL L \left[\langle R|\phi^\alpha(L)\rangle|\pi_\alpha(L)\rangle - \langle R|\pi_\alpha(L)\rangle|\pi_{-\alpha}(L)\rangle \right] \\
&\quad -g_{\mathrm{s}} \int dL_1 dL_2 dL_3 \langle T_{L_2L_3L_1}|B^1_{-\alpha_1}B^2_{\alpha_2}B^3_{\alpha_3}|\phi^{\alpha_1}(L_1)\rangle_1|\pi_{\alpha_2}(L_2)\rangle_2|\pi_{\alpha_3}(L_3)\rangle_3 \\
&\quad -\frac{1}{2}g_{\mathrm{s}} \int dL_1 dL_2 dL_3 \langle D_{L_3L_1L_2}|B^1_{-\alpha_1}B^2_{-\alpha_2}B^3_{\alpha_3}|\phi^{\alpha_1}(L_1)\rangle_1|\phi^{\alpha_2}(L_2)\rangle_2|\pi_{\alpha_3}(L_3)\rangle_3
\end{aligned}$$

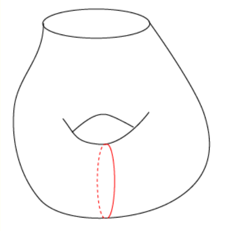
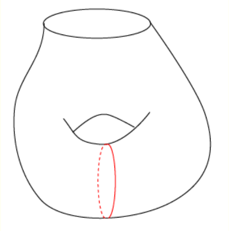
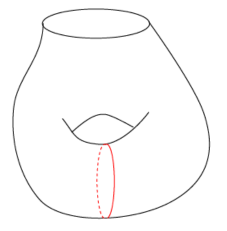
  - 運動項と3点相互作用のみからできている
  - ゲージ不変性を明白にするため、補助場を導入する必要がある

弦理論の作用？

$$\frac{e^{-S[\phi]}}{\int [d\phi] e^{-S[\phi]}} = \lim_{\tau\to\infty} \langle \phi | e^{-\tau \hat{H}_{\mathrm{FP}}} | 0 \rangle$$

- この式を用いれば、弦理論の作用 $S[\phi]$ が求まる

$$S[\phi] = \phi^2 + g_{\mathrm{s}}\phi^3 + g_{\mathrm{s}}\phi + \cdots$$

 $\times\infty +$  $\times(1-\infty)$ $=$ 

- 作用 $S[\phi]$ はwell-definedではない
- Fokker-Planck formalismが必要不可欠

3. まとめ

- 弦理論を記述する方程式・作用はまだ見つかっていない
- これらを見つけるには、リーマン面を分割する新しいルールが必要

- リーマン面のpants decompositionを用いて、ボゾン弦の場の理論を構築した
- Fokker-Planck ハミルトニアンは運動項と3点相互作用のみからなる

- これを超弦理論に拡張することができるか？