Hamilton-Jacobi Method and D-brane Effective Actions in Supergravity

土屋麻人　（阪大理）

2003年11月14日　於筑波大

佐藤松夫氏（阪大理）との共同研究

Prog. Theor. Phys. 109 (2003) 687, hep-th/0211074

Nucl. Phys. B671 (2003) 293, hep-th/0305090

hep-th/0310125, to appear in Phys. Lett. B

1 Introduction

♠ AdS/CFT対応(Maldacena, Gubser-Klebanov-Polyakov, Witten)

典型例 AdS_5/CFT_4　't Hooft couplingが大きいとき

4D large-N $\mathcal{N}=4$ super Yang Millsの相関関数の母関数

=type IIB supergravity on $AdS_5\times S^5$のon-shell作用

$$\langle e^{\int d^4x\phi_0(x)\mathcal{O}(x)}\rangle_{CFT}=e^{-S^{\text{on-shell}}},\quad S^{\text{on-shell}}=\int d^4x\int^{\infty}du\mathcal{L}_{IIB}(\bar{\phi}(x,u))$$

$\bar{\phi}(x,u)$は$AdS_5\times S^5$上での$\phi(x,\infty)=\phi_0(x)$を満たす古典解。

$u=\infty$はAdS_5の境界。

$g_s=g_{YM}$,　$g_{YM}^2N=\tilde{R}^4/\alpha'^2=R^4$、$\tilde{R}$は$AdS_5$の半径

uはfield theory側のUVのカットオフに相当。

⇒ Holographic renormalization (group) (Bianchi-Freedman-Skenderis)

特に、超重力理論のAdS_5のまわりでのHamilton-Jacobi方程式

=Yang Millsの繰り込み群方程式(de Boer-Verlinde-Verlinde)

この対応は$SO(4,2) \times SO(6)$という高い対称性に基づき確立されたが、元々は

1. 開弦と閉弦の双対性
2. D-braneの多体系は、それらの間の距離が短くて相対速度が小さいとき、超対称性が効き、開弦の励起状態は無視できて、低エネルギー有効理論で記述できる。D3-braneの有効理論は4D $\mathcal{N}=4$ super Yang Mills。
3. N枚のD3-braneを表すsugra解のnear-horizon limitは$AdS_5 \times S^5$であり、AdS_5の半径が大きいとき、閉弦の理論は超重力理論によって近似できる。

という事実に基づく。

この対応はこの種の事実を基にどこまで拡張可能か？

I) 対称性が低い場合。non CFT(non AdS)。超対称性が低いとき。非可換のとき。

II) 弦理論のレベルへの拡張。α'補正。ループ補正。

♠ NCYMに双対と予想されるsugra解 (Hashimoto-Itzaki, Maldacena-Russo)

- constant B 場中のD3-braneの低エネルギー有効理論 (Seiberg-Witten limit) は 4D $\mathcal{N}=4$ Noncommutative Yang Mills (NCYM)

- constant B 場中 (B_{23} のみ) のN枚のD3-braneを表すsugra解 (Breckenridge-Michaud-Myers)。 $\theta=0$ で通常のD3-brane解に帰着。

$$ds^2 = f^{-1/2}[-dx_0^2 + dx_1^2 + h(dx_2^2+dx_3^2)] + f^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5)$$

$$f = 1 + \frac{\alpha'^2 R^4}{r^4},\ h^{-1} = \frac{\sin^2\theta}{f} + \cos^2\theta,\ B_{23} = \tan\theta f^{-1} h,\ \cos\theta R^4 = 4\pi g N$$

- B 場をnontrivialのまま、near-horizon limit (=Seiberg-Witten limit) をとる

$$\alpha' \to 0,\quad \tan\theta = \frac{\tilde{b}}{\alpha'},\quad \frac{\tilde{b}}{\alpha'} x^{2,3} \to x^{2,3},\quad r = \alpha' R^2 u,\quad g = \frac{\alpha'}{\tilde{b}}\hat{g}$$

$$ds^2 = \alpha' R^2 \left[u^2(-dx_0^2 + dx_1^2) + \frac{u^2}{1+a^4u^4}(dx_2^2+dx_3^2) + \frac{du^2}{u^2} + d\Omega_5 \right]$$

$$B_{23} = \frac{\alpha'}{\tilde{b}} \frac{a^4u^4}{1+a^4u^4},\quad a^2 = \tilde{b}R^2,\quad R^4 = 4\pi\hat{g}N$$

この解はNCYNに双対と予想されている。($\theta_{23} = \tilde{b}$) $\tilde{b}=0$ のとき、$AdS_5 \times S^5$

♠ 結果

D-brane有効作用 (Born-Infeld作用＋ Wess-Zumino作用) とM-brane有効作用は超重力理論のHamilton-Jacobi方程式の解。すなわち、これらの有効作用は超重力理論のon-shell作用。

例えばD3-braneの場合、このH-J方程式の解はB場中のD-braneを表すsugra解およびそのnear-horizon limit のまわりのon-shell作用。他のブレーンについては

on-shell作用である有効作用	対応するsugra解 (n.h.l.) に双対なfield theory
D3-brane	$4D\mathcal{N}=4$ NCYMおよび$4D\mathcal{N}=4$ super Yang Mills
Dp-brane $(p\neq 3)$	$(p+1)$D super Yang Millsおよびその非可換版?
M2-brane	3D$\mathcal{N}=8$SCFT
M5-brane	6D$\mathcal{N}=(2,0)$SCFTおよびその非可換版
NS 5-brane	Little String Theory
(p,q) string	?

♠ 結果の意義

1. それ自体興味深い。**D-brane**有効作用は弦理論の**disk**振幅の計算により求まり、α'展開の**all order**の寄与を含む。超対称性が効いているはず。
2. **I)**の問題への寄与。超重力理論の**on-shell**作用を用いて、**dual field theory**との対応を調べる。特に、**NCYM**の**holograhic renormalization (group)**。
3. **II)**の問題への寄与。これらの**on-shell**作用はα'補正を含んでいるので、**gauge/gravity**対応の弦理論レベルへの拡張への手がかりになる？
4. **curved space-time**上での弦理論の量子化？
5. 新しい**sugra**解の探索。**H-J**方程式の完全解を探す。

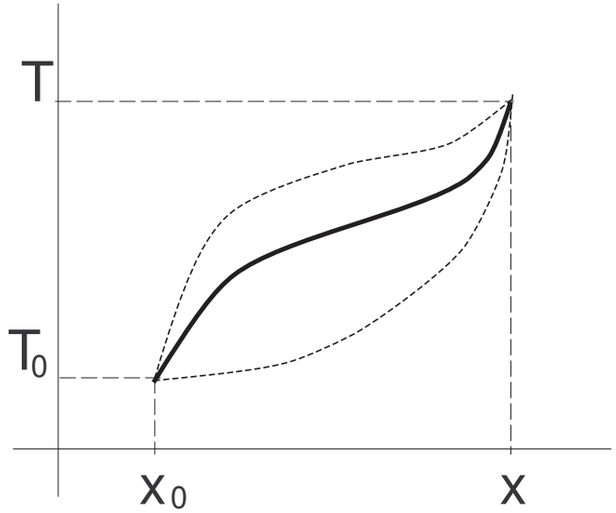
以下、**D3-brane**の場合を例にとって、話を進める。他のブレーンの場合も同様にできる。

2　Hamilton-Jacobi方程式

♠ 正準量子化と経路積分の関係

$$\psi(x,T) \equiv \langle x|\ e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(T-T_0)}\ |x_0\rangle = \int \mathcal{D}q \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{T_0}^{T} dtL\right\}$$

ここで、 $L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$



$\psi(x,T)$ はSchrödinger方程式を満たす

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,T) = 0 \qquad (1)$$

$\hbar \to 0$極限で、

$$\psi(x,T) \overset{\hbar\to 0}{\longrightarrow} e^{\frac{i}{\hbar}S} \quad \text{with} \quad S(x,T) = \int_{T_0}^{T} dt L^{\text{on-shell}}$$

$$(1) \to \frac{\partial S}{\partial T} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + O(\hbar) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial T} + H = 0 \quad \text{with} \quad p = \frac{\partial S}{\partial x}$$

Hamilton-Jacobi方程式

運動方程式は1階の微分方程式$m\dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x}$に帰着

♠ 正準変換

$S(x_1, \cdots, x_n; \beta_1, \cdots, \beta_k; T)$ を自由度nの系のH-J方程式のk個の任意定数$\beta_1, \ldots, \beta_k$を含む解とする。　⇒　$\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i}$は保存量（時間に依らない）

$k = n$のとき、α_iとβ_iは$2n$個の初期値に相当し、

$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}$と$\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i}$を用いて、問題は完全に解かれる。

このとき、S は新しいハミルトニアンがゼロとなるような正準変換の生成子で、

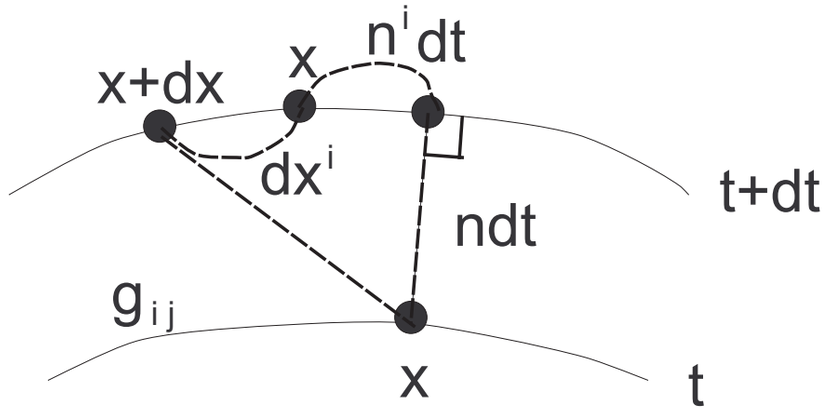
$\beta_1, \cdots, \beta_n$ は新しい正準運動量、$\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \beta_i}$は新しい一般化座標

3　重力の正準形式

♠ ADM分解

$$ds^2 = g^{(4)}_{MN} dx^M dx^N = -n^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + n^i dt)(dx^j + n^j dt)$$
$$= (-n^2 + n^i n_i)dt^2 + 2n_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j$$

n : lapse関数,　　n^i $(i = 1, 2, 3)$: shift関数



♠ 重力＋スカラー場の作用

$$I = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left(R^{(4)} - \frac{1}{2}\partial_M \phi \partial^M \phi - V(\phi) \right)$$
$$= \int dt d^3x \sqrt{-g} \left(\pi^{ij} \partial_t g_{ij} + \pi_\phi \partial_t \phi - n\mathcal{H} - n^i \mathcal{P}_i \right),$$

ここで、π^{ij} と π_ϕ は正準共役運動量で、

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}(\pi^i_i)^2 + \frac{1}{2}(\pi_\phi)^2 - R^{(3)} + \frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + V(\phi)$$
$$\mathcal{P}^i = -2\nabla_j \pi^{ij} + \pi_\phi \partial^i \phi$$

♠ Constraints

n と n^i はLagrange multiplierとして振舞う

$$\mathcal{H} = 0 \quad \text{(Hamiltonian constraint)}$$
$$\mathcal{P}^i = 0 \quad \text{(momentum constraint)}$$

第1類拘束条件

$\mathcal{H}$ と $\mathcal{P}^i$ は一般座標変換の生成子 (cf. ゲージ理論におけるGauss law constraint)

♠ 重力系のHamilton-Jacobi方程式

Sはg_{ij}とϕの境界値G_{ij}とΦの汎関数

$$\frac{\partial S}{\partial T}=0 \tag{2}$$

$$\mathcal{P}^i=0 \ \rightarrow \ 0=-2\nabla_j\left(\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta S}{\delta G_{ij}}\right)+\partial^i\Phi\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta S}{\delta\Phi} \tag{3}$$

$$\mathcal{H}=0 \ \rightarrow \ 0=\left(\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta S}{\delta G_{ij}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(G_{ij}\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta S}{\delta G_{ij}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta S}{\delta\Phi}\right)^2-\mathcal{L} \tag{4}$$

ここで、$\mathcal{L}=R_G^{(3)}-\frac{1}{2}\partial_i\Phi\partial^i\Phi-V(\Phi)$

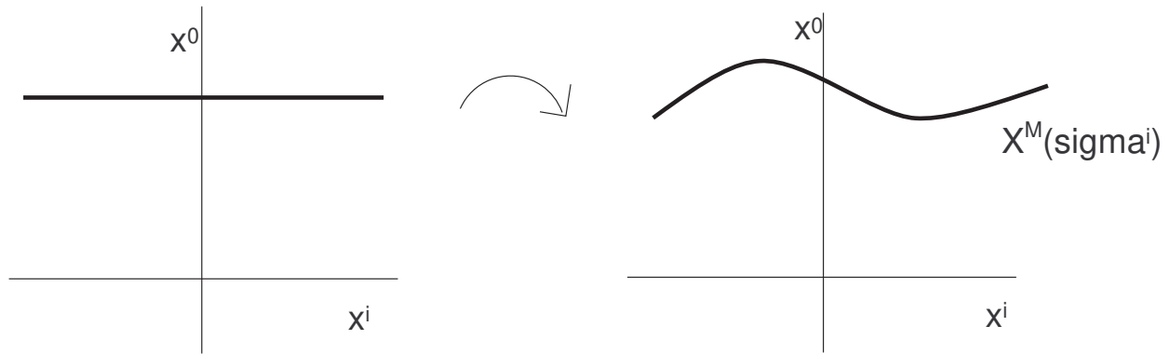
(2)はSがtに陽に依らないことを意味し、(3)はSが3次元の一般座標変換に対して不変であることを意味する。

(4)は非自明でSの形を決定する。(4)をH-J方程式と呼ぼう。

♠ Wheeler-De Witt equation

$$0=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta}{\delta G_{ij}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(G_{ij}\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta}{\delta G_{ij}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\delta}{\delta\Phi}\right)^2-\mathcal{L}\right]\psi[G_{ij},\Phi]$$

♠ 一般の空間的超曲面上のon-shell作用



$x^M = X^M(\sigma^i)$で指定される空間的超曲面上で場の境界値を与え、on-shell作用を求める

1. Flat spaceでは問題は複雑になる。(Dirac)
2. 重力系では問題の複雑さは変わらない。$\sigma^0 = T$が$X^M(\sigma^i)$に一致するような一般座標変換$(x^0, x^1, x^2, x^3) \to (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$をすると、$\sigma$系でのH-J 方程式は通常のものに帰着する。

3. すなわち、σ系での場にtildeをつけることにすると、境界値$\tilde{G}_{ij}(\sigma^k)$,$\tilde{\Phi}(\sigma^i)$に対する通常の形のH-J方程式を解いて、σ系でのon-shell作用を求めて、

$$\tilde{G}(\sigma^k)_{ij} = \frac{\partial X^M(\sigma^k)}{\partial \sigma^i}\frac{\partial X^N(\sigma^k)}{\partial \sigma^j} G_{MN}(X(\sigma^k)), \qquad \tilde{\Phi}(\sigma^i) = \Phi(X(\sigma^i))$$

によって、読み換えをすればよい。

4 Reduction of Type IIB sugra on S^5

♠ Type IIB supergravity

$$I_{10} = \int d^{10}x\sqrt{-g}\left[e^{-2\phi}\left(R_g + 4(\partial_M\phi)^2 - \frac{1}{2}|h_3|^2\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}(|f_1|^2 + |f_3 + c_0 h_3|^2 + \frac{1}{2}|f_5 + c_2 h_3|^2)\right] + \frac{1}{2}\int c_4 \wedge h_3 \wedge F_3$$

ここで、$h_3 = db_2, \quad f_{p+2} = dc_{p+1} \quad (p = -1, 1, 3)$,

さらに、**self-duality condition** $\quad *(f_5 + c_2 h_3) = f_5 + c_2 h_3 \quad$ を課す

♠ Ansatz

$$x^M = (\xi^\alpha,\ \theta_i) \quad (\alpha = 0, \cdots, 4, \quad i = 1, \cdots, 5)$$

$$ds_{10}^2 = g_{MN}\, dx^M dx^N = h_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha d\xi^\beta + e^{\rho(\xi)/2}\, d\Omega_5$$

$$\phi = \phi(\xi), \quad b_2 = \frac{1}{2}\, b_{\alpha\beta}(\xi)\, d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta, \quad \textbf{etc.}$$

このAnsatzを10次元の運動方程式に代入すると5次元の方程式の組を得る。

♠ 5次元作用

5次元の方程式は以下の作用から導かれる。

$$I_5 = \int d^5\xi\sqrt{-h}\left[e^{-2\phi+\frac{5}{4}\rho}\left(R_h + 4(\partial_\alpha\phi)^2 + \frac{5}{4}(\partial_\alpha\rho)^2 - 5\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\rho - \frac{1}{2}|h_3|^2\right)\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}e^{\frac{5}{4}\rho}\left((\partial_\alpha c)^2 + |F_2 + c_0 h_3|^2 + |f_5 + c_2 h_3|^2\right) + e^{-2\phi+\frac{3}{4}\rho}R^{(S^5)}\right]$$

ここで、$R^{(S^5)} = 20$

これは、type IIB sugraの5次元へのconsistent truncation

すなわち、この5次元重力のすべての解は10次元type IIB sugraの解に持ち上げられる。

5　D3-brane有効作用はH-J方程式の解

♠ ADM分解とH-J方程式

$\xi \equiv r$を時間として、ADM分解する$(\mu = 0, \cdots, 3)$

$$ds_5^2 = h_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = (n^2 + n_\mu n^\mu)\, dr^2 + 2n_\mu\, dr\, d\xi^\mu + g_{\mu\nu}\, d\xi^\mu d\xi^\nu$$

5次元重力のHamiltonian constraintを得る

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{H} = & -e^{2\phi - \frac{5}{4}\rho} \left((\pi^{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}{\pi_\phi}^2 + \frac{1}{2}{\pi^\mu}_\mu \pi_\phi + \frac{4}{5}{\pi_\rho}^2 + \pi_\phi \pi_\rho \right. \\ & \left. + \left(\pi^{\mu\nu}_{b_2} - c\pi^{\mu\nu}_{c_2} - 6c_{\lambda\rho}\pi^{\mu\nu\lambda\rho}_{c_4} \right)^2 \right) \\ & -e^{-\frac{5}{4}\rho} \left(\frac{1}{2}{\pi_{c_0}}^2 + (\pi^{\mu\nu}_{c_2})^2 + 12(\pi^{\mu\nu\lambda\rho}_{c_4})^2 \right) - \mathcal{L} \end{aligned}$$

ここで、$\mathcal{L} = e^{-2\phi + \frac{3}{4}\rho} R^{(S^5)} + e^{-2\phi + \frac{5}{4}\rho} \left(R_g + 4\nabla_\mu \nabla^\mu \phi + \cdots \right)$

$\pi^{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}_{b_2}, \cdots$を$\pi^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta S}{\delta G_{\mu\nu}}$，　$\pi^{\mu\nu}_{b_2} = \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta S}{\delta B_{\mu\nu}}$，$\cdots$で置き換えると

H-J方程式を得る。

♠ D3-brane有効作用は解

$\xi^\alpha = X^\alpha(\sigma^\mu)$ $(\alpha = 0, \cdots, 4,\ \mu = 0, \cdots, 3)$ で指定される時間的超曲面上のon-shell作用を求める

$(\xi^\mu, \xi^4) \to (\sigma^\mu, \sigma^4)$ よりξ系からσ系に移り、σ^4 を時間とみなし、同じ形のH-J方程式を得る。すべての場は時間(σ^4)にしか依らないと仮定。

このときの解を S_0 と書く。以下の形はH-J方程式の解、すなわちこの超曲面上のon-shell作用

$$S_0 = S_c + S_{BI} + S_{WZ}$$

$$S_c = \pm\sqrt{5R^{(S^5)}} \int d^4\sigma \sqrt{-\tilde{G}} e^{-2\tilde{\Phi}+\tilde{\Upsilon}},$$

$$S_{BI} = \beta \int d^4\sigma e^{-\tilde{\Phi}} \sqrt{-\det(\tilde{G}_{\mu\nu} + \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu})},$$

$$S_{WZ} = \pm\beta \int \left(\tilde{C}_4 + \tilde{C}_2 \wedge \tilde{\mathcal{F}} + \frac{1}{2}\tilde{C}_0\, \tilde{\mathcal{F}} \wedge \tilde{\mathcal{F}} \right),$$

ここで、$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \tilde{B}_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}$, β, $F_{\mu\nu}$は任意定数　　完全解ではない。

$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\alpha(\sigma^\lambda)}{\partial\sigma^\mu} \frac{\partial X^\beta(\sigma^\lambda)}{\partial\sigma^\nu} G_{\alpha\beta}(X(\sigma^\lambda))$ etc.　　$X^\alpha(\sigma^\mu)$ はbraneの集団座標

♠ S_0はB場中のD3-braneを表すsugra解(BMM)およびそのnear-horizon-limit(HIMR)のまわりのon-shell作用

ξ系に戻る。S_0を使って運動方程式を1階の微分方程式に帰着させる。

$$\partial_r G_{\mu\nu} = n e^{2\Phi - \frac{5}{4}\Upsilon} \left(-2\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \pi_\phi \right)$$
$$= n e^{2\Phi - \frac{5}{4}\Upsilon} \left(-2 G_{\mu\lambda} G_{\nu\rho} \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta S_0}{\delta G_{\lambda\rho}} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\delta S_0}{\delta \Phi} \right) , \text{etc.} \quad (5)$$

$\beta = -16\pi\alpha'^2 N$, $F_{\mu\nu} = 0$ のとき、(BMM)と(HIMR)は(5)を満たす

♠ $F_{\mu\nu}$はw.b.上のU(1)ゲージ場

$\tilde{B}_{\mu\nu}$をconstantだけシフトするゲージ変換を$F_{\mu\nu}$が吸収

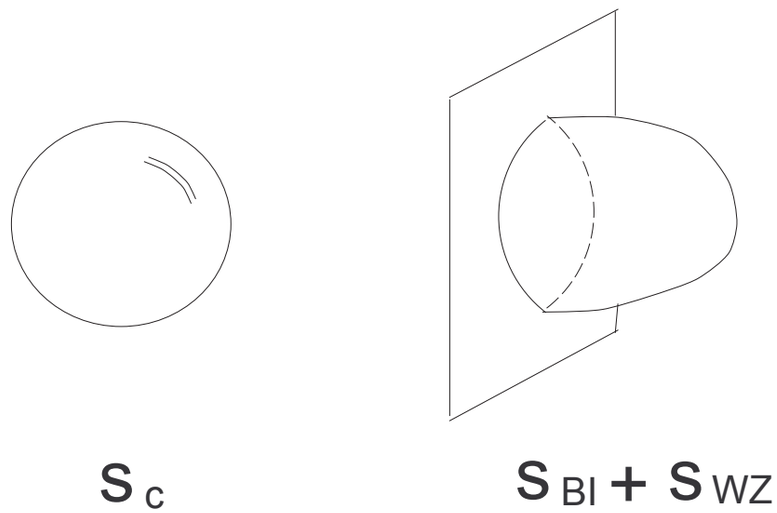
♠ R-R場を再定義して、type IIB sugraの作用で全体に$e^{-2\phi}$が掛かるようにする

S_{BI}とS_{WZ}は$e^{-\tilde{\Phi}}$の依存性を持つ。⇒ string theoryのdisk diagramに相当

S_cは$e^{-2\tilde{\Phi}}$の依存性を持つ。⇒ string theoryのsphere diagramに相当

$\sim$ vacuum transition amplitude

S_cは差し引くべき



6　展望

♠ **Holographic renormalization (group) (de Boer-Verlinde-Verlinde)**

on-shell作用の微分展開: $S = S_0 + S_2 + \cdots + \Gamma$

$S_0 + S_2 + \cdots$ は相殺項、Γ は相関関数の生成母関数、u はカットオフ

共形不変な固定点からのフローの場合は S_0 がベータ関数と異常次元を与える。

♠ より複雑なsugraのreductionをして S_0 を得る

超対称性の低いゲージ理論に対応　**(Klebanov-Strassler, Maldacena-Nunez,...)**

♠ 超弦理論における計算との対応

$$\log \int_B \mathcal{D}\Psi e^{iI_{SFT}} \quad \overset{g_s \to 0}{\longrightarrow} \quad \langle B|0\rangle = \int_{disk} \mathcal{D}X e^{iI_{ws}} \text{ (curved background上)}$$

$$\downarrow \alpha' \to 0 \qquad\qquad \updownarrow (\alpha' \to 0)$$

$$\log \int_B \mathcal{D}G_{MN} e^{iI_{sugra}} \quad \overset{g_s \to 0}{\longrightarrow} \quad iS$$

$\partial_\sigma X^\mu |B\rangle = \partial_\tau X^i |B\rangle = 0 \sim$ **H-J方程式の特解を選ぶ?**

♠ **Codimensionが2以上の場合**

♠ 超重力理論における新しい解の探索と解の分類

我々の解は完全解ではないが、いくつかの任意定数を含んでいて、それらは保存量を与える。 $\sim \frac{\partial S_0}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial S_0}{\partial F_{\mu\nu}}$

(i)1階の微分方程式＋保存量から、新しい解を探す。

(ii) より多くの任意定数を含むH-J方程式の解を見つける。

(iii) 完全解を得る。$\Rightarrow$ 解の分類

♠ S-brane