Penrose limit and Green-Schwartz strings *

最上 武志

筑波大学大学院 博士課程 物理学研究科

平成 14 年 10 月 30 日

*Shun'ya Mizoguchi, Yuji Satoh, Takeshi Mogami, hep-th/0209043

1　目次

2. Introduction

2.1. Green-Schwartz 形式と R-NS 形式

2.2. supercoset method

3. Penrose limit と plane-wave

4. IIB supergravity の拘束条件

5. normal cordinate expansion

6. light-cone gauge における plane-wave 上の作用

7. まとめ

2 Introduction

2.1 Green-Schwartz 形式と R-NS 形式

R-NS形式はボゾンのみの弦理論の world sheet 座標 (τ, σ) をsuperspace(τ, σ, θ) に拡張した形の理論。

具体的な作用は、

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \left(\partial_a X^\mu \partial^a X_\mu - i\bar{\Psi}^\mu \rho^a \partial_a \Psi_\mu\right)$$

という形だが、超場形式で書き表すと、

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma d^2\theta \bar{D}Y^\mu DY_\mu,$$

$$Y^\mu = X^\mu(\sigma) + \bar{\theta}\psi^\mu(\sigma) + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F^\mu(\sigma).$$

である。

利点　covariant な量子化が楽にできる。

欠点　・時空の SUSY が明らかに見えない。

・ GSO projection によって spectrum の一部を取り除く操作が必要。
(Ψ^μ が反交換する場であるにも関わらず時空の Lorentz 変換については vector である事が原因。)

・RR 背景場。

一般の NS-NS 背景場中の作用 (曲った時空の上での作用) への拡張は、

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma d^2\theta [G_{\mu\nu}(Y) + B_{\mu\nu}(Y)]\bar{D}Y_\mu DY_\nu,$$

と書けるが、RR 背景場があるときの作用は書けない。

Green-Schwartz 形式はボゾンのみの弦理論の target space の座標 X^μ を super-space $(X^\mu, \theta^{1\alpha}, \theta^{2\alpha})$ に拡張した形の理論。

具体的な作用は、

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ S_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-g}g^{ab}\Pi_a^\mu\Pi_{b\nu}\ , \quad \Pi_a^\mu = \partial_a X^\mu - i\bar{\theta}^I\Gamma^\mu\partial_a\theta^I, \\ S_2 &= \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\left\{-i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_b\theta^1 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_b\theta^2)\right. \\ &\quad \left. + \epsilon^{ab}\bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_a\theta^1\cdot\bar{\theta}^2\Gamma^\mu\partial_b\theta^2\right\}. \end{aligned}$$

という形になる。

第 1 項 S_1 はボゾンのみの弦理論に θ^I を導入して時空の SUSY $\delta\theta^I = \epsilon^I$, $\delta X^\mu = i\bar{\epsilon}^I\Gamma^\mu\theta^I$ について不変な形に単純に拡張した物だが、S_1 だけでは望みの Type II 理論にならない。特にボゾンとフェルミオンの自由度を数えると

<u>fermion</u>: $\theta^{I\alpha}$ は 2 組 $(I = 1, 2)$ の 16 成分 spinor

<u>boson</u>: X^μ の物理的自由度は 8

という風に数が食い違う。しかし、第 2 項 S_2 を加えると fermion のゲージ対称性 (κ-symmetry)

$$\begin{aligned} \delta\theta^I &= 2i\Gamma\cdot\Pi_a\kappa^{Ia}, \\ \delta X^\mu &= i\bar{\theta}^I\Gamma^\mu\delta\theta^I, \\ \delta(\sqrt{-g}g^{ab}) &= -16\sqrt{g}(P_-^{ac}\bar{\kappa}^{1c}\partial_d\theta^1 + P_+^{ac}\bar{\kappa}^{2c}\partial_d\theta^2), \\ P_\pm^{ab} &= \frac{1}{2}(g^{ab} \pm \epsilon^{ab}/\sqrt{g}). \end{aligned}$$

が現れて $\theta^{I\alpha}$ の物理的自由度が半分の $8(\times\ 2\text{組})$ に落ちるので、$N = 2$ の SUSY とつじつまが合う。

<u>利点</u>　作用が明らかに時空の SUSY に対して対称。

<u>欠点</u>　covariant な量子化が難しい。

Green-Schwartz 形式の作用を一般の背景場の上に拡張すると、

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int d^2\xi\,\left[\sqrt{-g}g^{ij}\Phi E_i^a E_j^b \eta_{ab} + \epsilon^{ij} E_i^B E_j^A \mathcal{B}_{AB}\right]. \qquad (1)$$

と書き表される。$(E_i^A \equiv \partial_i z^M E_M{}^A)$

ここで Φ, $E_M{}^A$, $\mathcal{B}_{AB}$ 等の super field はそれぞれ独立ではなく、IIB supergravity(Type IIB 超弦理論の低エネルギーの理論) の解になるものが許される。

・RR 背景場も自然に含まれている。

超場形式の作用から実際に量子化できる作用を得るためには、成分場で展開 (θ の各次数で展開) する事が必要。

もし、何も考えずに素朴に展開しようとすると、

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int d^2\xi\,\left[A_{I\alpha}\theta^{I\alpha} + B_{I\alpha J\beta}\theta^{I\alpha}\theta^{J\beta} + C_{I\alpha J\beta K\gamma}\theta^{I\alpha}\theta^{J\beta}\theta^{K\gamma} + \cdots\right].$$

という形で、θ の 16 次 (8+8) まで続く。

量子化はまず不可能。したがって...、

<u>何か特定の背景場に制限して、作用が簡単になるものだけを考える。</u>

2.2 supercoset method

背景場を制限する 1 つの案として、全ての SUSY を保つ背景場を考えた場合。supercoset method という方法で作用の具体的な展開を書き下せる。

supercoset method:
直接 supergravity の解を考える代わりに、始めから SUSY を保つ形の因子 (Cartan 1-form) だけを使って作用を書き下す。

- $AdS_5 \times S^5$ 背景場 (Metsaev-Tseytlin, 1998)
- Maximally supersymmetric plane-wave 背景場 (Metsaev, 2001)

Cartan 1-form の定義:
super space を supersymmetry 群の部分群 (coset space) に一対一対応させる表現 $G(x, \theta)$ をひとつ決める。この G を用いて、(左不変) Cartan 1-form $L^{\mathcal{A}}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} G^{-1}dG &= L^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} \\ &\equiv L^{\mu} P^{\mu} + L^{\alpha} \bar{Q}_{\alpha} + \bar{L}^{\alpha} Q_{\alpha} + \frac{1}{2} L^{\mu\nu} J^{\mu\nu}, \\ L^{A} &= dX^{M} L^{A}_{M}. \end{aligned} \tag{2}$$

この Cartan 1-form を組み合せて作用を作れば自動的に supersymmetric な作用が得られる。さらに、

- 背景場が flat なときに既知の Green-Schwarz の Type IIB 超弦の作用に帰着する事、
- θ の 0 次 (すなわちボゾン部分) が $AdS_5 \times S^5$ 上または plane-wave 上の σ-model になっている事、
- 理論が κ-symmetry を持っている事、

という要求を満たす作用を求めると作用が一意に決まる。

Cartan 1-form で書いた作用は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{WZ} \\
&\equiv -\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}L_b^\mu L_a^\mu + d^{-1}\mathcal{H}, \qquad (3) \\
\mathcal{H} &= iL^\mu L\bar{\gamma}^\mu L + h.c., \\
L_a^{\mathcal{A}} &\equiv \partial_a X^M L_M^{\mathcal{A}},
\end{aligned}$$

と書き表わされ、Cartan 1-form 自体はその定義によって定まる微分方程式 (Maurer-Cartan 方程式)、

$$\begin{aligned}
dL^{\mathcal{A}}T_{\mathcal{A}} &= d(G^{-1}dG) \\
&= -G^{-1}dG\ G^{-1}dG \\
&= L^{\mathcal{C}} \wedge L^{\mathcal{B}}\ [T_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{C}}\} \\
&= L^{\mathcal{C}} \wedge L^{\mathcal{B}}\ f_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{\mathcal{A}}\ T_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

を上記の要求の元で解けばわかる。

その結果は... 、

・$AdS_5 \times S^5$ の場合

$$
\begin{aligned}
I &= \int d^2\sigma \left[\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{2kin} + \mathcal{L}_{2WZ} + O(\theta^6)\right], && (4)\\
\mathcal{L}_1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}(\partial_i x^{\hat{\mu}} e^{\hat{a}}_{\hat{\mu}} - i\bar{\theta}^I\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_i\theta^I)(\partial_j x^{\hat{\mu}} e^{\hat{a}}_{\hat{\mu}} - i\bar{\theta}^I\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_j\theta^I)\\
&\quad -i\epsilon^{ij}\partial_i x^{\hat{\mu}} e^{\hat{a}}_{\hat{\mu}}(\bar{\theta}^1\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_j\theta^1 - \bar{\theta}^2\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_j\theta^2) + \epsilon^{ij}\bar{\theta}^1\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_i\theta^1\bar{\theta}^2\hat{\gamma}^{\hat{a}} D_j\theta^2, && (5)\\
\mathcal{L}_{2kin} &= \frac{1}{24}\sqrt{g}g^{ij}\Big(i\partial_i x^\mu e^a_\mu\Big[2\epsilon^{IJ}(-\bar{\theta}^I\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^a D_j\theta^K + \bar{\theta}^I\gamma^a\gamma^{a'}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{a'} D_j\theta^K)\\
&\quad +\epsilon^{KL}(\bar{\theta}^I\gamma^{abc}\theta^I\bar{\theta}^K\gamma^{bc} D_j\theta^L - \bar{\theta}^I\gamma^a\gamma b'c'\theta^I\bar{\theta}^K\gamma^{b'c'} D_j\theta^L)\Big]\\
&\quad +\partial_i x^{\mu'} e^{a'}_{\mu'}\Big[2\epsilon^{IJ}(-\bar{\theta}^I\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{a'} D_j\theta^K + \bar{\theta}^I\gamma^a\gamma^{a'}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^a D_j\theta^K)\\
&\quad +\epsilon^{KL}(\bar{\theta}^I\gamma^{a'b'c'}\theta^I\bar{\theta}^K\gamma^{b'c'} D_j\theta^L - \bar{\theta}^I\gamma^{a'}\gamma bc\theta^I\bar{\theta}^K\gamma^{bc} D_j\theta^L)\Big]\Big), && (6)\\
\mathcal{L}_{2WZ} &= \frac{1}{24}\epsilon^{IJ}\Big[4(i\partial_i x^\mu e^a_\mu\bar{\theta}^1\gamma^{ab}\theta^2\bar{\theta}^I\gamma^b D_j\theta^I + i\partial_i x^{\mu'} e^{a'}_{\mu'}\bar{\theta}^1\gamma^{a'b'}\theta^2\bar{\theta}^I\gamma^{b'} D_j\theta^I)\\
&\quad +is^{IJ}\epsilon^{KL}\partial_i x^\mu e^a_\mu(-\bar{\theta}^I\gamma^{abc}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{bc} D_j\theta^L + \bar{\theta}^I\gamma^a\gamma^{b'c'}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{b'c'} D_j\theta^L)\\
&\quad +s^{IJ}\epsilon^{KL}\partial_i x^{\mu'} e^{a'}_{\mu'}(-\bar{\theta}^I\gamma^{a'b'c'}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{b'c'} D_j\theta^L + \bar{\theta}^I\gamma^{a'}\gamma^{bc}\theta^J\bar{\theta}^K\gamma^{bc} D_j\theta^L)\Big]. && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a, b, c &= 0, 1, 2, 3, 4\\
a', b', c' &= 5, 6, 7, 8, 9\\
\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} &= 0, 1, 2, \ldots, 9\\
I, J, K, L &= 1, 2\\
D\theta^I &= \theta^I\left[d + \frac{1}{4}(\omega^{ab}\gamma^{ab} + \omega^{a'b'}\gamma^{a'b'})\right] - \frac{1}{2}i\epsilon^{IJ}\theta^J(\partial x^\mu e^a_\mu\gamma^a + i\partial x^{\mu'} e^{a'}_{\mu'}\gamma^{a'})
\end{aligned}
$$

θの6次以降の項は Light cone gauge を取れば消えてくれるので書いていない。
作用を書き下すのはできるが複雑で量子化は無理。

・Maximally supersymmetric plane-wave の場合

metric:

$$ds^2 = -2dx^+dx^- - m^2x_I^2(dx^+)^2 + dx_I^2, \tag{8}$$

$$x^\pm = x^0 \pm x^9,$$

$$F_{+1234} = F_{+5678} = \text{const.} \times m,$$

の上では、

fermion の light-cone gauge (κ-symmetry の固定)

$$\bar{\gamma}^+\theta = \bar{\gamma}^+\bar{\theta} = 0, \tag{9}$$

を課した段階で、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{WZ} \qquad (10)\\
\mathcal{L}_{kin} &= -\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}\left(2\partial_a x^+\partial_b x^+ - x_I^2\partial_a x^+\partial_b x^L\partial_a x^I\partial_b x^I\right)\\
&+ -i\sqrt{g}g^{ab}\partial_b x^+\left(\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\partial_a\theta + \theta\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + 2i\partial_a x^+\bar{\theta}\bar{\gamma}^-\gamma^1\bar{\gamma}^2\gamma^3\bar{\gamma}^4\theta\right),\\
\mathcal{L}_{WZ} &= i\epsilon^{ab}\partial_a x^+\theta\bar{\gamma}^-\partial_b\theta + h.c.,
\end{aligned}$$

という θ の 2 次までの形になり、さらに

ボゾンの light-cone gauge (conformal symmetry の固定)、

$$\sqrt{g}g^{ab} = \eta^{ab}, \qquad x^L(\tau,\sigma) = \tau,$$

を課すと、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_a x^I\partial^a x^I - \frac{m^2}{2}x_I^2 - i\bar{\psi}\bar{\gamma}^-\varrho^a\partial_a\psi + im\bar{\psi}\bar{\gamma}^-\gamma^1\bar{\gamma}^2\gamma^3\bar{\gamma}^4\psi, \tag{11}$$

という質量のある自由スカラー場と、自由 Majorana フェルミオン場だけの理論になる。

<u>量子化は簡単！</u>

supercoset method による方法では、SUSY を保つ特別な 2 つの背景場以外の事は何もわからないが...、

<u>もう少し一般の背景場で同様な作用の簡単化が起きる事はないか？</u>

3 Penrose limit と plane-wave

Maximally supersymmetric plane-wave 背景場

$$ds^2 = -2dx^+dx^- - m^2x_I^2(dx^+)^2 + dx_I^2, \tag{12}$$

$$x^\pm = x^0 \pm x^9, \qquad F_{+1234} = F_{+5678} = \text{const.} \times m,$$

は、実は $AdS_5 \times S^5$ 背景場から Penrose limit と呼ばれる座標変換の極限操作で得られる。そこで、Penrose limit という操作に注目して、完全に一般の背景場に対して Penrose limit を取って得られる特別な背景場のグループについて、IIB 超弦理論の作用の展開を考える。

一般にどんな背景場について Penrose limit を取っても結果は (一般には Maximally supersymmetric ではない)plane-wave 背景場

$$ds^2 \;=\; dx^+dx^- - h_{\tilde{m}\tilde{n}}(x^+)x^{\tilde{m}}x^{\tilde{n}}(dx^+)^2 - \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}dx^{\tilde{m}}dx^{\tilde{n}} \tag{13}$$

の形になる事が知られている。(Penrose, 1972)

この plane-wave は、もう少し広い定義である pp-wave
("Plane-fronted wave with Parallel rays")
の一種である。pp-wave の一般形は

$$ds^2 \;=\; dx^+dx^- - H(x^+, x^{\tilde{m}})(dx^+)^2 - \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}dx^{\tilde{m}}dx^{\tilde{n}} \tag{14}$$

と書き表わされ、$x^\pm = x^9 \pm x^0$ と考えると、何かの "平面波" が光速で $-x^9$ 方向に流れている状態を意味する。(一般の pp-wave では厳密には平面ではなく伝播方向と直交した方向 $x^{\tilde{m}}$ への依存性がある。)

・Penrose limit のやり方、とその結果

(ほぼ) 一般に、ある測地線上とその近傍において、metric が

$$ds^2 = 2dY^- \left[dY^+ + \alpha(Y^m)dY^- + \beta_{\tilde{m}}(Y^m)dY^{\tilde{m}}\right] + C_{\tilde{m}\tilde{n}}(Y^m)dY^{\tilde{m}}dY^{\tilde{n}}, \quad (15)$$

という形になるように座標変数 $Y^m = (Y^+, Y^-, Y^{\tilde{m}})$ を選ぶ事ができる。(Penrose, 1972)

$\underline{Y^-, Y^{\tilde{m}} \text{ を固定して } Y^+ \text{ を動かした線} = \text{測地線}}$

また、ゲージ自由度を用いて (測地線近傍で) p-form potential の成分が $A_{+mn\cdots} = 0$ を満たすようにできる。

さらに座標変数と metric, p-form potential のリスケーリング

$$Y^+ = X^+, \ Y^- = \Omega^2 X^-, \ Y^{\tilde{m}} = \Omega X^{\tilde{m}}, \quad (16)$$

$$ds^2 \to (ds^2)' \equiv \Omega^{-2} ds^2, \ A_p \to A'_p \equiv \Omega^{-p} A_p, \quad (17)$$

と極限操作 $\Omega \to 0$ を行う。(Penrose Limit)

結果の metric と potential, field strength の形は

$$ds^2 = 2dX^- dX^+ + C_{\tilde{m}\tilde{n}}(X^+)dX^{\tilde{m}}dX^{\tilde{n}}, \quad (18)$$

$$A_p = \frac{1}{p!} A_{\tilde{m}_1 \cdots \tilde{m}_p}(X^+) dX^{\tilde{m}_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\tilde{m}_p}, \quad (19)$$

$$F_{p+1} = \frac{1}{p!} F_{+\tilde{m}_1 \cdots \tilde{m}_p}(X^+) dX^+ \wedge dX^{\tilde{m}_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\tilde{m}_p}, \quad (20)$$

という形になる。(変数変換後の' は改めて取り除いた)

metric の表式はさらに harmonic coordinates x^a と呼ばれる座標

$$x^+ = X^+ \ , \ x^- = X^- - \tfrac{1}{4}\dot{C}_{\tilde{m}\tilde{n}}(x^+)Q^{\tilde{m}}_{\tilde{m}'}Q^{\tilde{n}}_{\tilde{n}'}X^{\tilde{m}'}X^{\tilde{n}'}, \ x^{\tilde{m}} = Q^{\tilde{m}}_{\tilde{n}}(x^+)X^{\tilde{n}},$$
$$C_{\tilde{m}'\tilde{n}'}Q^{\tilde{m}'}_{\tilde{m}}Q^{\tilde{n}'}_{\tilde{n}} = \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}, \ C_{\tilde{m}'\tilde{n}'}[\dot{Q}^{\tilde{m}'}_{\tilde{m}}Q^{\tilde{n}'}_{\tilde{n}} - Q^{\tilde{m}'}_{\tilde{m}}\dot{Q}^{\tilde{n}'}_{\tilde{n}}] = 0,$$
$$h_{\tilde{m}\tilde{n}} = -[\dot{C}_{\tilde{m}'\tilde{n}'}\dot{Q}^{\tilde{n}'}_{\tilde{n}} + C_{\tilde{m}'\tilde{n}'}\ddot{Q}^{\tilde{n}'}_{\tilde{n}}]Q^{\tilde{m}'}_{\tilde{m}}$$

に常に変換できて、(G.W.Gibbons, 1975)

$$ds^2 \ = \ dx^+dx^- - h_{\tilde{m}\tilde{n}}(x^+)x^{\tilde{m}}x^{\tilde{n}}(dx^+)^2 - \delta_{\tilde{m}\tilde{n}}dx^{\tilde{m}}dx^{\tilde{n}} \qquad (21)$$

という一般の形に変形できる。この形にすると flat metric との違いが $h_{\tilde{m}\tilde{n}}(x^+)$ の項だけなので扱いやすい。

ここで Penrose Limit で得られる背景場を調べたが、後に用いるのは以下の 3 つの性質である。

(I) $g_{mn}, \epsilon_{m_1,\ldots,m_{10}}, \eta_{ab}, \epsilon_{a_1,\ldots,a_{10}}$ 以外のテンソルについては、下付き $-$ か上付き $+$ の添字を持つ成分は全て必ず 0 である。

(II) 全てのテンソルは添字を全て下付きにしたときに、少なくとも質量次元の数と同じだけ下付きの $+$ 添字を持つ。

(III) 下付きの $+$ と上付きの $-$ の数の和は (縮約等の操作をしても) 保存する。

したがって、これらの性質 (と後述の (II) をもう少し厳しくした条件) を満たしているものに限れば、Penrose limit では得られない種類の pp-wave 等にも適用できる。

4 IIB supergravity の拘束条件

SUSY を保たない plane-wave 上の展開を計算する方法として、以降では normal cordinate expansion (後述) という方法を用いる。

その計算の準備として背景場 (≡ IIB supergravity の場) がどのような拘束条件を満たしているかを知っておく必要がある。

IIB supergravity の場は以下のような場で構成される。

superspace coordinates	:	$z^M = (x^m, \theta^\mu, \theta^{\bar{\mu}})$
frame 1-forms	:	$E^A = (E^a, E^\alpha, E^{\bar{\alpha}}) = dz^M E_M{}^A$
$SO(1,9) \times U(1)$ connection 1-form	:	$\hat{\Omega}_A{}^B$
complex 2-form potential	:	$\mathcal{A}$
real 4-form potential	:	B
$SU(1,1)$ の要素を成す scalar superfield	:	$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$

これらの場やその微分から様々な field strength 等が構成される。

- $\hat{\Omega}_A{}^B$ から torsion 2-form T^A と curvature 2-from $R_A{}^B$
- $\mathcal{A}$ と B から complex 3-form field strength $\mathcal{F}$ と 5-form field strength Z
- $\mathcal{V}$ の成分から scalar super field Φ
- $\mathcal{V}^{-1}d\mathcal{V}$ から P_a や Λ_α(spin 1/2 の物理的な場を含む superfield)

これらを使って一般の曲った背景時空上の Type IIB 超弦理論の作用が

$$I = \frac{1}{2}\int d^2\xi \left[\sqrt{-g}g^{ij}\Phi E_i^a E_j^b \eta_{ab} + \epsilon^{ij} E_i^B E_j^A \mathcal{B}_{AB}\right] . \tag{22}$$

と書き表される。(ここで、$\mathcal{H} \equiv \mathcal{F} + \bar{\mathcal{F}} = d\mathcal{B}$)

supergravity の拘束条件 (Bianchi 恒等式等を含む) は必要な結果の一部だけを示すと、

特に $T_{AB}{}^{C}$, $\mathcal{H}_{ABC}$, $D\Lambda_\beta$ 等の成分が他の field strength や σ 行列等で次のように書き表される。

$$
\begin{aligned}
&T_{ab}{}^{c} = T_{\alpha\beta}{}^{c} = T_{\alpha b}{}^{c} = T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = T_{\alpha\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}} = 0\,, \\
&T_{\alpha\bar{\beta}}{}^{c} = -i(\sigma^c)_{\alpha\beta}\,, \quad T_{a\beta}{}^{\bar{\gamma}} = -\tfrac{3}{16}\bar{F}_{abc}(\sigma^{bc})_{\beta}{}^{\gamma} - \tfrac{1}{48}\bar{F}^{bcd}(\sigma_{abcd})_{\beta}{}^{\gamma}\,, \\
&T_{a\beta}{}^{\gamma} \to iZ_{abcde}(\sigma^{bcde})_{\beta}{}^{\gamma}\,, \quad T_{a\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}} = -(\overline{T_{a\beta}{}^{\gamma}})\,, \quad T_{a\bar{\beta}}{}^{\gamma} = -(\overline{T_{a\beta}{}^{\bar{\gamma}}})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{H}_{\alpha\beta\bar{\gamma}} = \mathcal{H}_{\alpha\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \mathcal{H}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \mathcal{H}_{a\beta\bar{\gamma}} = 0\,, \\
&\mathcal{H}_{a\beta\gamma} = \mathcal{H}_{a\bar{\beta}\bar{\gamma}} = -i\Phi(\sigma_a)_{\beta\gamma}\,, \quad \mathcal{H}_{ab\gamma} = -\Phi(\sigma_{ab})_{\gamma}{}^{\delta}\bar{\Lambda}_\delta\,, \quad \mathcal{H}_{ab\bar{\gamma}} = -\Phi(\sigma_{ab})_{\gamma}{}^{\delta}\Lambda_\delta\,.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
D_\alpha\Lambda_\beta = -\frac{i}{24}F_{abc}(\sigma^{abc})_{\alpha\beta}\,, \quad \bar{D}_\alpha\Lambda_\beta = -\frac{i}{2}P_a(\sigma^a)_{\alpha\beta} \tag{25}
$$

特に一部の、値が 0 の成分や σ 行列そのものになっている成分があるおかげで後で紹介する θ-expansion の計算がだいぶ簡略化される。

ここで、σ^a は 32×32 の Dirac 行列 Γ^a を 16×16 の小行列に分割した物

$$
\Gamma^a \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ \bar{\sigma}^a & 0 \end{pmatrix} \tag{26}
$$

であり、$\sigma^a\bar{\sigma}^b + \sigma^b\bar{\sigma}^a = 2\eta^{ab}$ を満たす。また、それぞれの成分は $\sigma^a = (\sigma^a)^{\alpha\beta}$, $\bar{\sigma}^a = (\sigma^a)_{\alpha\beta}$ と書き表わす。

$\sigma^{a_1a_2\cdots a_k}$ は k 個の σ 行列を反対称に組んだ行列である。ただし、行列の積は必ず上付き添字と下付き添字のペアで縮約を取ると約束する。

5 normal cordinate expansion

以降では、Penrose limit で得られる背景場の上での作用を直接的な方法で θ の各次数の成分場で展開する。ただし、簡単の為に fermion 場の背景場は 0 であるとする。

作用を θ の各次数の成分場で直接展開するとき、ただの Taylor 展開だと係数が共変にならない。

$z^M = z_0^M$ 近傍の点 P における関数を z_0^M の周りで展開する際に式を共変的に定義する為に、z_0^M を通って点 P に達する測地線 (と測地線上の位置を決める affine parameter) を指定する事で点 P を指定する方法を用いる。

参考：(Atick-Dhar, 1987) (Mukhi, 1986)

測地線を、展開の中心点における測地線の接ベクトル y^A によって指定し (geodesic equation により、$y^A \equiv y^M E_M^A$ が $y^B D_B y^A = 0$ を満たす事がわかる)、作用の展開を

$$\begin{aligned} I(z') &= \left[e^{\Delta(z,y)} I(z)\right]_{z=z_0}, \\ \Delta(z,y) &= \int d^2\xi\, y^A(\xi) D_A(\xi), \end{aligned} \tag{27}$$

で共変的に定義する。

正規直交座標を選んだときに $z'^M \equiv z_0^M + \epsilon^M(z_0, y) = z_0^M + y^M$ を満たすように (affine parameter と)y^A の大きさを選べば、その正規直交座標においてちょうど普通の Taylor 展開

$$\begin{aligned} I(z') &= I(z) + \int d^2\xi\, \epsilon^M(\xi) \frac{\delta}{z^M(\xi)} I(z) \\ &+ \frac{1}{2!} \int d^2\xi' \int d^2\xi\, \epsilon^N(\xi') \epsilon^M(\xi) \frac{\delta}{z^M(\xi)} \frac{\delta}{z^N(\xi')} I(z) \\ &+ \cdots, \end{aligned} \tag{28}$$

に帰着するような定義になる。

演算子 Δ を作用した結果を具体的に計算すると、

$$\begin{aligned}
\Delta X^{BC\cdots}_{DE\cdots} &= y^A D_A X^{BC\cdots}_{DE\cdots}\,, \\
\Delta y^A &= 0\,, \\
\Delta E_i^A &= D_i y^A + E_i^C y^B T_{BC}{}^A\,, \\
\Delta(D_i y^A) &= y^B E_i^D y^C R_{CDB}{}^A\,,
\end{aligned} \tag{29}$$

が得られる ($X^{BC\cdots}_{DE\cdots}$ は任意の tensor)。

Δ を掛けた形の因子で IIB の作用を展開する際に必要なものは (29) 式の形だけで尽されている。

背景場の tensor については拘束条件で σ 行列等に関連している成分が多くあり、おかげで計算の複雑さが緩和される。

例えば Δ の 1 次の項は、

$$\begin{aligned}
L^{(1)} &= \frac{1}{2}\left[\sqrt{-g}g^{ij}\left(\Delta\Phi E_i^a E_j^b + 2\Phi E_i^a \Delta E_j^b\right)\eta_{ab} + \epsilon^{ij} y^C E_i^B E_j^A \mathcal{H}_{ABC}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Phi E_i^a(\sqrt{-g}g^{ij}y^\alpha - \epsilon^{ij}\bar{y}^\alpha)(\sigma_a)_{\alpha\beta}\left[(\sigma_b)^{\beta\gamma}\Lambda_\gamma E_j^b - 2i\bar{E}_j^\beta\right] + \text{h.c.}\ ,
\end{aligned} \tag{30}$$

という形が得られる。

θ^A での作用の展開式 (θ-expansion) の各項を得る為には、求めたい θ の次数の数だけ Δ を作用させてから最後に

$$z^M = z_0^M = (X^m, 0, 0),\ y^A = y_0^A = (0, \theta^\alpha, \theta^{\bar{\alpha}}) \tag{31}$$

と置けばよい。

6 light-cone gauge における plane-wave 上の作用

6.1 展開式に含まれるテンソルの条件

light-cone gauge で κ-symmetry を固定するといくつかの面で展開式が簡略化される。

1) light-cone gauge の定義は

$$(\sigma^+)_{\alpha\beta}\theta^\beta = (\sigma^+)_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta = 0\,. \tag{32}$$

で与えられる。この gauge のもとでは

$$(\sigma^+)_{\alpha\beta}D_i\theta^\beta = (\sigma^+)_{\alpha\beta}D_i\bar{\theta}^\beta = 0\,. \tag{33}$$

も成立する事が $D_a\theta^\alpha$ の具体的な展開を調べる事で確かめられる。

2) θ^A を含む因子は

$$\bar{\theta}\sigma^-\theta\,,\quad \theta\sigma^{-\tilde{a}\tilde{b}}\theta\,,\quad \bar{\theta}\sigma^{-\tilde{a}\tilde{b}}\bar{\theta}\,,\quad \bar{\theta}\sigma^{-\tilde{a}\tilde{b}}\theta\,,\quad \bar{\theta}\sigma^{-\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}}\theta\,. \tag{34}$$

と、(34) 式の θ^A を $D_i\theta^A$ で置き換えたものだけになる。($+$ や $-$ の添字の付き方が違う項は $\{\sigma^+,\sigma^-\} = 2\eta^{+-}$ を挿入すると 0 である事がわかる。)

3) 作用の展開式に直接現れる因子は

- $\Phi, H_{ABC}, T_{AB}{}^{C}, R_{ABC}{}^{D}$ とこれらの共変微分,
- $\eta_{ab}, \epsilon_{a_1,\ldots,a_{10}}$,
- $E_i^A, y^{\hat{\alpha}}, D_i y^{\hat{\alpha}} \quad \Big(\hat{\alpha} = (\alpha, \bar{\alpha})\Big)$,

だけであり、 2-form potential $\mathcal{B}$ 等が裸で現れる事はない。

この事実を用いると、先に調べた背景場の性質の (II) が精密化されて、

(II') 全てのテンソルは添字を全て下付きにしたときに、ちょうど質量次元の数と同じだけ下付きの + 添字を持つ。

が成立する事が確かめられる。

総合すると θ-expansion に含まれる任意のテンソルについて (添字を全て下付きにしたとき)、

$$(+\text{添字の数}) = (-\text{添字の数}) + (\theta\text{の次数}) + (\text{質量次元})$$

の条件を満たす成分のみが 0 以外の値を持つ事がわかる。

6.2 θ 展開後の最大次数

Δ の 1 次の項 (30) にさらに Δ を掛けた高次の項の一般形は

$$(\Delta^{2k}\Phi)(\Delta^{2l}E_i^a)(\Delta^{2m}E_j^b)[\theta(\sigma_{ab}+\eta_{ab})(\Delta^{2n-1}\Lambda)]\,,$$
$$(\Delta^{2k}\Phi)(\Delta^{2l}E_i^a)\theta^\alpha(\sigma_a)_{\alpha\beta}(\Delta^{2m-1}E_j^\beta)\,, \qquad (35)$$

という形だけである。

(35) 式に $z=z_0,\ \theta=\theta_0$ を代入した後で最大で次数いくつまでの項が 0 以外の値を持って残るかを調べる。

- $\Delta^{2n}\Phi$ については...

  質量次元 0 なので θ の次数は 0。つまり $n=0$ の Φ だけ残る。

- $\theta(\sigma_{ab}+\eta_{ab})(\Delta^{2n-1}\Lambda)$ については...

  質量次元 0、θ の次数 $2n\ (n\geq 1)$ なので $+$ 添字の数が足りず、この因子は全く残らない。

- $\Delta^{2n}E_i^a$ については...

$$\Delta^{2n}E_{ia} \ \rightarrow\ W_{ab}E_i^b + S_{a-}(\theta\sigma^-D_i\theta)\,,$$
$$+\ M_{a-\tilde{c}\tilde{d}}(\theta\sigma^{-\tilde{c}\tilde{d}}D_i\theta) + N_{a-\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}}(\theta\sigma^{-\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}}D_i\theta)+\cdots\,,$$

  係数のテンソルは全て質量次元 0 なので、θ の次数は W_{++} が 2 次、W_{+-} , $W_{\tilde{a}\tilde{b}}$, S_{+-} , $M_{+-\tilde{c}\tilde{d}}$, $N_{+-\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}}$ は全て 0 次、他に残る成分はないので、2 次の Δ^2E_{i+} と 0 次の E_{ia} だけが残る。

- $\Delta^{2n-1}E_i^\alpha$ については...

$$\Delta^{2n-1}E_i^\alpha \ \rightarrow\ W_aE_i^a\theta^\alpha + SD_i\theta^\alpha+\cdots\,,$$

  W_a は質量次元 1、S は質量次元 0 なので、W_+ と S だけが次数 0 で残る。したがって 1 次の ΔE_i^α だけが残る。

全部合わせると、高次の項の一般形 ((35) 式) の中では

$$\Phi E_i^a \theta^\alpha (\sigma_a)_{\alpha\beta} (\Delta E_j^\beta) \,, \tag{36}$$

という形の 2 次の項だけが残る。すなわち 4 次以降の項は必ず消える事が示された。

具体的な 2 次の展開式の計算は、判っている式を代入するだけだが、light-cone gauge による簡単化の効果は、4 次以降の項が消える事以外には特に重要ではないので、2 次までの項のみ gauge fix しない一般の形で書き下すと、

$$\begin{aligned} I &= \int d^2\xi \, (L^{(0)} + L^{(2)}) \,, \\ L^{(0)} &= \sqrt{-g} g^{ij} \Phi E_i^a(x) E_j^b(x) \eta_{ab} + \epsilon^{ij} E_i^b(x) E_j^a(x) \mathcal{B}_{ab}(x) \,, \\ L^{(2)} &= \frac{1}{4} \Phi E_i^a E_j^b (\sqrt{-g} g^{ij} \theta - \epsilon^{ij} \bar{\theta}) \sigma_a (\sigma_b \mathcal{D}\theta - 2i \overline{\mathcal{D}_b \theta}) + \text{h.c.} \ . \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_a \theta)^\alpha &\equiv D_a \theta^\alpha - i Z_{abcde} (\sigma^{bcde})^\alpha{}_\beta \theta^\beta - \frac{3}{16} F_{abc} (\sigma^{bc})^\alpha{}_\beta \bar{\theta}^\beta + \frac{1}{48} F^{bcd} (\sigma_{abcd})^\alpha{}_\beta \bar{\theta}^\beta \,, \\ (\mathcal{D}\theta)_\alpha &\equiv \frac{i}{2} P_a (\sigma^a)^\alpha{}_\beta \bar{\theta}^\beta + \frac{i}{24} F_{abc} (\sigma^{abc})^\alpha{}_\beta \theta^\beta, \end{aligned}$$

という形になる。

ちなみに、$(\mathcal{D}_a\theta)^\alpha$ と $(\mathcal{D}\theta)_\alpha$ は、それぞれちょうど gravitino の supertransformation $\delta_\theta \psi_a^\alpha$ と spin 1/2 field の supertransformation $\delta_\theta \lambda_\alpha$ に対応している。(Einstein frame)

7 まとめ

- Penrose limit で得られる任意の背景場で、fermion の背景場が 0 にする制限だけを付けると light cone gauge での作用は必ず θ の 2 次までの項しか含まない事が示された。
- 証明には Penrose limit で得られる背景場の性質 (I)(II')(III) だけしか使っていないので、この同じ性質を持つ背景場であればもっと一般の背景場の場合にも適用できる。
- 計算は Type IIB 超弦理論のみで行なった。今後、同じ方法を IIA 等にも適用してみる事は課題になっている。
- 本論文ではさらに θ の 2 次までに限って light cone gauge にも依存しない一般の場合の展開を convension が違う 2 つの書き方 (Einstein frame と String frame) で具体的に示している。既に存在する他の論文の展開式の計算 (や予想) は convension の違いや、typo のせいでどれが正しいのか不明確なところがあったが、本論文で直接的な展開方法を用いた事によって結着を付けた形である。