Novel Approach to Super Yang-Mills Theory on Lattice

- Exact fermionic symmetry and "Ichimatsu" pattern -

澤中 英之（新潟大 自然）

2002. 12. 13 at 筑波大学

Papers:
hep-lat/0210049, hep-lat/0209034
Prog. Theor. Phys. 108 (2002) 363
Nucl. Phys. Proc. Suppl. 106 (2002) 947
and in progress
(by K. Itoh, M. Kato, H. Sa, H. So, N. Ukita)

§1. Introduction

- Motivation:

格子上で超対称 Yang-Mills理論を構成したい

非摂動的定式化、数値的解析が可能

- これまでの試み:

Adjoint Wilson Fermion + Fine Tuning

Curci-Veneziano('87), Taniguchi('00), Montvay et al('01)

C-Vの Proposalに基づき、
フェルミオン質量項の Fine Tuning

Domain Wall Fermion + 5D Majorana Condition

Kaplan-Schmaltz('00), Freming-Kogut-Vranas('01)

Fine Tuningは不要になった
5次元方向のマヨラナ条件(Non-local)

→ 格子上で厳密なフェルミオニックな対称性はない！

- 最近、新展開の予感:

⇔ 厳密な対称性をあくまで追求！

Spatial Lattice

Kaplan-Katz-Unsel(hep-lat/0206019)

Deconstruction of Lattice SUSY theories

(6 daughters from 3 Mothers by orbifolding)

セル-パイプ システム

可能な限り localな理論の枠で

フェルミオニックな対称性を探す

連続極限で生き残る対称性 → SUSY ？

新しい“格子”構造により Exact Symmetryに昇華

Contents

1. Introduction
2. Our Models

   セル、パイプ模型 と セル＋パイプ模型

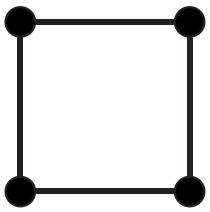
   “市松”パターン格子
3. Summary

§2. Our Models

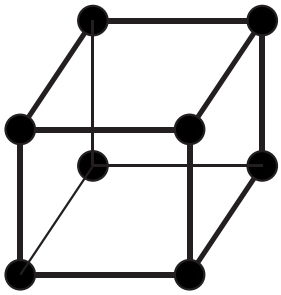
- セル模型 (Cell Model) $\cdots$ Minimalな世界

最小自由度の基本格子（セル）上の
リンクにリンク変数 $U_{n,\mu}$,
サイトにグラスマン変数 ξ_n を置く

（セルの図）



２次元



３次元

まず、このセル一個の世界で、
連続での Super Yang-Mills変換に‘類似な’
フェルミオニックな対称性を探す (→ One Cell)

セルの世界を全格子空間に拡張する (→ Multi Cell)

Action

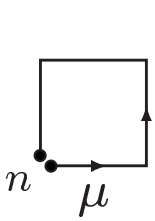
Wilson's plaquette Action

+ real staggered Fermion

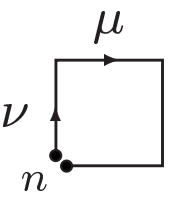
$$S = S_g + S_f \quad ,$$

$$S_g = -\beta \sum_{n,\mu\nu} \text{tr}\ (U_{n,\mu\nu} + U_{n,\nu\mu})$$

$$= -\beta \sum_{n} \sum_{0<\mu<\nu} \text{tr} \left(\right.$$



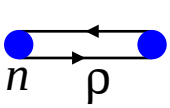
$+$



$\left. \right)$

$$S_f = \sum_{n,\rho} b_\rho(n)\ \text{tr}\ \left(\xi_n U_{n,\rho} \xi_{n+\hat{\rho}} U^\dagger_{n,\rho} \right)$$

$$= \sum_{n} \sum_{0<\rho} b_\rho(n)\ \text{tr}\ \left(\right.$$



$\left. \right)$

$b_\rho(n)$: Staggered fermion の符号因子

→ Majorana fermion と無矛盾に選ぶことが可能

フェルミオニックな変換 (Pre-SUSY 変換)

Continuum SUSY;

$$\delta A_\mu \sim \bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi \quad , \quad \delta\psi \sim \gamma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\epsilon$$

フェルミオン変数 ξ_n の変換

$$\delta\xi_n = \sum_{0<\mu<\nu} C_{n,\mu\nu}\,(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})$$

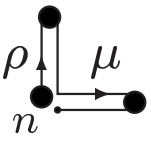
$$\sim C_{n,\mu\nu}\left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ n \end{array}\!\!\!

Check of Action Invariance

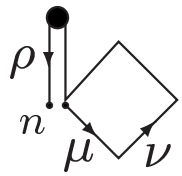
$$\delta S = \delta_U S_g + \delta_U S_f + \delta_\xi S_f$$

Pre-SUSY変換で得られる独立なオペレータ
→ 2-Type;

· $\delta_U S_f = 0$ ← $O(\xi^3)$ term Vanishing

tr [] : $b_\mu(n)\alpha^\rho_{n,\mu} + b_\rho(n)\alpha^\mu_{n,\rho} = 0$

· $\delta_U S_g + \delta_\xi S_f = 0$ ← $O(\xi^1)$ term Vanishing

tr [] : $b_\rho(n) C_{n,\mu\nu} \sim \beta\left(\alpha^\rho_{n,\mu} - \alpha^\rho_{n,\nu}\right)$

(∗) $\delta S_g \neq 0$: Not BRS-like Symmetry

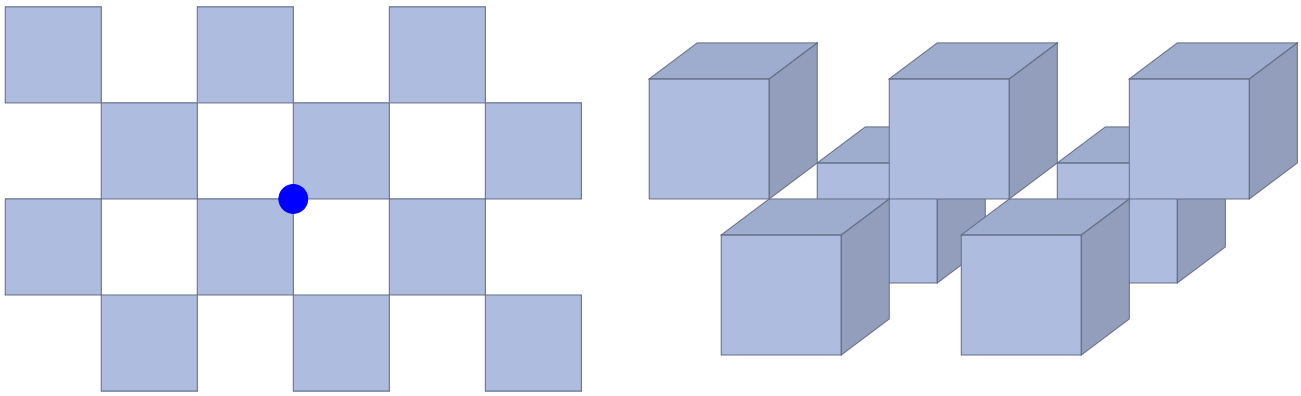
変換パラメータに対する関係式が得られる

例えば $O(\xi^3)$ 項の相殺する条件から ⇒ $\alpha^\mu_{n,\mu} = 0$

独立な変換パラメータの数→ $D-1$ per Site ($C_{n,\mu 1}$)

果たして、全空間への拡張は可能か？

⇒ ‘市松’模様にセルをつないで、全空間に拡張



Pre-SUSY変換も拡張され、
隣りのセルにまたぐような変換まで考慮する

Pre-SUSYを保った拡張になっていることが確認できる
独立な変換パラメータの数 → $2D-1$ per Site

しかし、
セル間の相互作用 → サイトのフェルミオンを通して

フェルミオンが無いとセルがバラバラ (摂動的描像破綻)

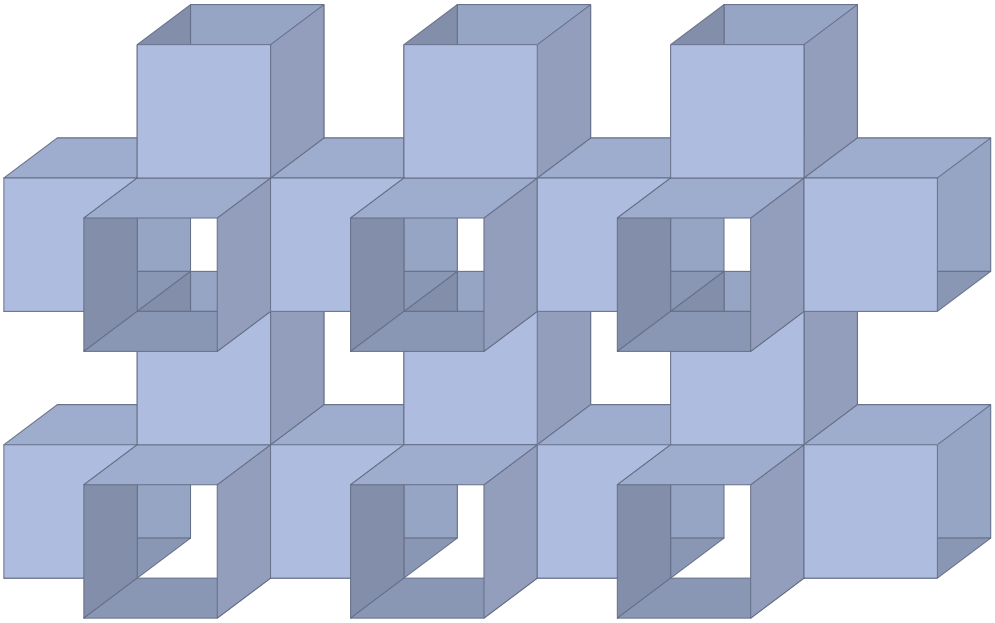
実は、市松模様の拡張には別パターンが考えられる

- パイプ模型

  セル模型の相補的な拡張(パイプ＝セルの補集合)

$$P_{Cell} = \{n_{\mu\nu} | n_\mu + n_\nu \equiv 0 \mod 2\}$$
$$P_{Pipe} = \{n_{\mu\nu} | n_\mu + n_\nu \equiv 1 \mod 2\}$$

（3次元のパイプの図）

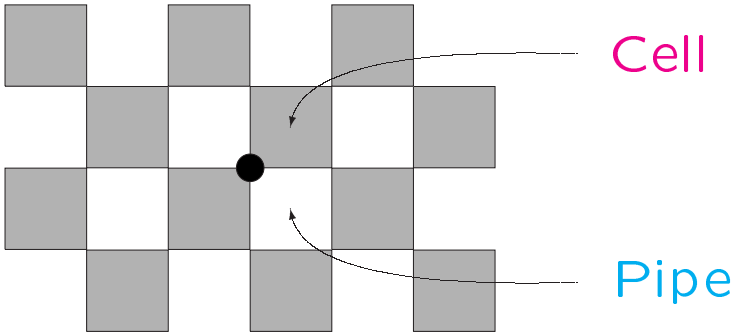


セル模型との違いはゲージセクター(プラケット変数)のみ
→ パイプ模型でも Pre-SUSY を見出すことができる

フェルミオンが無くてもバラバラにならない
しかし、やはりフェルミオンが無いとき、連続極限は??

- セル＋パイプ模型

セルとパイプの違い ＝ プラケット変数の選び方の違い



それぞれのプラケット変数に異なるゲージ結合定数(β_c, β_p)を選んで理論を定義$(\rightarrow$ セル＋パイプ模型$)$

作用

$$S = S_f + S_g^{cell}[\beta_c] + S_g^{pipe}[\beta_p]$$

Pre-SUSY変換

$$\delta = \delta_U + \delta_\xi = \delta_U + \delta_\xi^{cell} + \delta_\xi^{pipe} \quad ,$$

$$\delta\xi_n = \sum_{P_{cell}} C_{n,\mu\nu}^{cell}(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu}) + \sum_{P_{pipe}} C_{n,\mu\nu}^{pipe}(\cdots)$$

セル＋パイプ模型の対称性

$$\delta S = \delta_U S_f + \delta_U S_g^{cell} + \delta_U S_g^{pipe} + \delta_\xi^{cell} S_f + \delta_\xi^{pipe} S_f$$

$\delta S = 0$から

$$\delta_U S_f = 0$$
$$\delta_U S_g^{cell} + \delta_\xi^{cell} S_f = 0$$
$$\delta_U S_g^{pipe} + \delta_\xi^{pipe} S_f = 0$$

変換パラメータの関係式が
独立な自由度 $2D-1$ で解ける

$$(C^{(+)}_{n,\mu 1},\ C^{(-)}_{n,\mu 1},\ \alpha^{-1}_{n,1})$$

$\star$ セル＋パイプ模型で Pre-SUSY の存在を確認できる

- ゲージセクターのダイナミクス
  通常の格子ゲージ理論 ($\beta_c = \beta_p = \beta$) と同様

  自由度 (ゲージ場) の問題

- 連続極限のナイーブな評価
  フェルミオンの Pre-SUSY 変換 $\delta\xi_n$

$$\delta\xi_n \sim (1-\frac{\beta_p}{\beta_c}) 2ia^{D/2} g \sum_{0<\mu<\nu} (-)^{n_\mu + n_\nu} (C^{(+)}_{n,\mu\nu} + C^{(-)}_{n,\mu\nu}) F_{n,\mu\nu}$$

  連続極限がとれる ($O(1)$ の対称性) ためには

$$\Rightarrow \quad \beta_c \neq \beta_p$$

  $\beta_c = \beta_p$ (通常の格子モデル) の場合に
  これは $O(a)$ の対称性になってしまう理由！

- 真空の構造
  Pure Gauge 系で (β_c, β_p) の相構造の解析
  (Itoh-Kato-Murata-S.H-So,
  hep-lat/0209030 and in preparation)

§3. Summary

- 厳密なフェルミオニック対称性をもつ格子模型を構成
  - BRS的な対称性でない ($\delta_U S_g \neq 0$)
  - ナイーブ連続極限で連続理論の超対称変換を含む

- '市松' 構造 (セル＋パイプ) をもつ格子模型
  - 並進 (mod 2)・回転不変, Reflection Positivity

SUSYに向けて

- スピナー構造の復活 (Spinor Reconstruction)
  - Staggered Majorana fermion; $b_\rho(n) \sim \eta_\rho(n)$

- 自由度の問題
  - Local Symmetry, Doubling Problem

- 連続極限
  - $\beta_c \neq \beta_p$ is crucial for $O(1)$ Symmetry

⋮