# 一様な電場内の誘電体球のポテンシャル

電場 $E_0$ が $x$ 軸に平行で、$x$ 軸の正の方向を向いているとする。半径 $a$、比誘電率 $\kappa(\equiv \epsilon_1/\epsilon_0)$ の誘電体球が原点に置かれているとして考える。まず無限遠方では誘電体の影響を無視できるので、

$$\phi_\infty = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta) \tag{1}$$

一方、軸対称性から、極軸上で発散しないポアソン方程式の一般解は、

$$\phi = \sum (A_n r^n + B_n r^{-1-n}) P_n(\cos\theta) \tag{2}$$

更にこの解が、原点で発散せず、無限遠方での境界条件 (1) を満たすことを要求すると、

$$\begin{aligned} \phi_{\mathrm{in}} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) && (3) \\ \phi_{\mathrm{out}} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-1-n} P_n(\cos\theta) - E_0 r P_1(\cos\theta) && (4) \end{aligned}$$

ここで $\phi_{\mathrm{in}}$ は $r < a$ の解、$\phi_{\mathrm{out}}$ は $r \geq a$ の解をあらわしている。この内部解と外部解に誘電体の表面での境界条件を課すことによって未定の定数を決める。

誘電体表面の境界条件は、$r = a$ で、

1) 境界に垂直な電束密度が等しい　$(\kappa \frac{\partial \phi_{\mathrm{in}}}{\partial r} = \frac{\partial \phi_{\mathrm{out}}}{\partial r})$

2) 境界に平行な電場が等しい $(\phi_{\mathrm{in}} = \phi_{\mathrm{out}})$

の 2 つである. これら 2 つの条件は、すべての $\theta$ について成り立たなければならない。$P_n(\mu)$ の直交性を考えると、上の二つの条件から、

$$\begin{aligned} A_0 &= B_0 = A_n = B_n = 0 \quad (n \geq 2) && (5) \\ A_1 &= \frac{-3E_0}{\kappa + 2} && (6) \\ B_1 &= \frac{(\kappa - 1) E_0 a^3}{\kappa + 2} && (7) \end{aligned}$$

が得られる。

したがって最終的に、

$$\phi_{\rm in} = \frac{-3E_0}{\kappa+2} r\cos\theta \tag{8}$$

$$\phi_{\rm out} = \frac{(\kappa-1)E_0 a^3}{\kappa+2}\frac{\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta \tag{9}$$

がえられる。この解の特徴は、1) 内部では外場 $E_0$ と同じ方向に、大きさ $3/(\kappa+2)$ 倍の一様電場になり、2) 双極子モーメント $P \equiv 4\pi\epsilon a^3 E_0(\kappa-1)/(\kappa+2)$ を定義すると、外部では双極子 $P$ の電場と元の電場の合成された場となっていることである。