前回、惑星の運動の軌道を表す方程式

$$\frac{1}{u} = r = \frac{\frac{L^2}{m\mu}}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

を求めました。$0 < \varepsilon < 1$ の場合、すなわち楕円軌道に対しては、楕円の長半径 a が重力源からの平均距離（すなわち遠日点と近日点を結ぶ線分の半分）にあたることより、

$$a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max}) = \frac{1}{2}\{r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)\}$$

と考えることができます。したがって軌道の方程式より、

$$a = \frac{L^2}{2m\mu}\left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}\right) = \frac{\frac{L^2}{m\mu}}{1-\varepsilon^2}$$

とあらわされます。またこれを利用すれば軌道の方程式として

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

という円錐曲線の式も求めることができますし、角運動量の大きさ L として

$$L = \sqrt{m\mu a(1-\varepsilon^2)}、$$

また面積速度として

$$\text{面積速度} = \frac{L}{2m} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu a}{m}(1-\varepsilon^2)}$$

が求まります。長半径 a、離心率 ε の楕円の面積は、短半径が
$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ だから

$$\text{楕円の面積} = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

とあらわされ、したがって楕円運動の周期 T は

$$T = \frac{\text{楕円の面積}}{\text{面積速度}} = 2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

となり、ケプラーの第3法則を導くことができます。
（ケプラーの第3法則 $\cdots$ 惑星の公転周期 T の2乗は長半径 a の3乗に比例する。）

長半径 a を直径とする仮想的な円を図のように導入すれば、面積速度一定のケプラーの第 2 法則は平均角速度 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ を用いて

$$\frac{\omega t}{2\pi} = \frac{SOP\text{の面積}}{\text{楕円の面積}} = \frac{QOP\text{の面積}}{\text{円の面積}}$$

となります。(ただし、近日点にいた時刻を $t = 0$ に選んでいる。) ここで $\omega t \neq \phi$、すなわち楕円軌道を回る速さは一定ではないから平均速度 ωt には一致しないことに注意して下さい。ここで、図より

$$QOP\text{の面積} = QCP\text{の面積} - \Delta QCO = \frac{1}{2}a^2\phi - \frac{1}{2}a^2\varepsilon\sin\phi$$

を使えば

$$\omega t = \phi - \varepsilon\sin\phi$$

が導かれます。(ケプラー方程式。) また幾何学的な考察より、

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= r\cos\theta = OR = a(\cos\phi - \varepsilon) \\ y &= r\sin\theta = SR = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\phi \end{aligned}$$

が求まります。