万有引力を記述するポテンシャル

$$V = -G\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

は距離の逆2乗に比例する引力ポテンシャルで、その方向は引力源の中心に向かっているため、中心力ポテンシャルと呼ばれます。簡単のため $GMm = \mu$ とおくと、Newton の運動方程式は以下のようになります。

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

引力源を中心とする2次元極座標で考えると方程式はシンプルになります。

$$\begin{aligned} ma_r &= m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = -\mu\frac{1}{r^2} \qquad (1) \\ ma_\theta &= m\left\{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\} = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

最初の式が動径方向に関する微分方程式、次が角度方向に関する微分方程式です。2式の最初の等号は、次のようにして求めることができます。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\theta &= -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

を $t$ で微分して

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_r &= -\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_y \\
&= \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{e}_y \\
&= -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}
$$

この2式より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr\boldsymbol{e}_r}{dt} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r \\
&= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{v} = \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\boldsymbol{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\boldsymbol{e_\theta}
\end{aligned}
$$