量子力学II（２学期）レポート２

締切：平成 23 年 11 月 29 日（火）

提出場所：自然学系 D 棟３階物理専攻事務室前のロッカー

問１　スピン $\frac{1}{2}$ の粒子が２つあるとして、それらのスピン演算子 $\hat{\mathbf{S}}_1, \hat{\mathbf{S}}_2$ を合成し

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$$

を作る。この場合のクレプシュゴルダン係数を具体的に計算してみることにする。

問１-１　公式

$$\hat{J}_\pm |j, m\rangle\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |j, m \pm 1\rangle\rangle$$

を用いて、$|1,1\rangle\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2$ に $\hat{J}_-$ を作用させることにより、$|1,0\rangle\rangle$ を求めよ。

問１-２　問１-１で求めた $|1,0\rangle\rangle$ に $\hat{J}_-$ を作用させることにより $|1,-1\rangle\rangle$ を求めよ。

問１-３　$|1,0\rangle\rangle$ と直交する状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2\right)$$

に $\hat{J}_\pm, \hat{J}_z$ を作用すると 0 になることを示せ。

問２　電磁場中の荷電粒子の状態 $|\psi\rangle$ はシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\hat{x})\right)^2 + e\phi(\hat{x})\right)|\psi\rangle$$

を満たす。$\Lambda(t,x)$ を任意の関数とするとき、$\vec{A}(x), \phi(x)$ にゲージ変換

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda$$
$$\phi \to \phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$$

を行っても、同じ物理系を表すはずである。$\vec{A}, \phi$ をゲージ変換した $\vec{A}', \phi'$ に置き換えた方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}'(\hat{x})\right)^2 + e\phi'(\hat{x})\right)|\psi'\rangle$$

の解 $|\psi'\rangle$ は

$$|\psi'\rangle = e^{-i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(t,\hat{x})}|\psi\rangle$$

で与えられることを示せ。$e^{-i\frac{e}{\hbar c}\Lambda(t,\hat{x})}$ はユニタリ演算子なので、$|\psi'\rangle$ は $|\psi\rangle$ と同等な状態になる。

問３　講義におけるゼーマン効果のエネルギーのずれの式

$$\Delta E = \langle\langle n, l \pm \frac{1}{2}, m|\hat{V}|n, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle\rangle$$

の右辺に

$$|n, l \pm \frac{1}{2}, m\rangle\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}}\left|l, m - \frac{1}{2}, +\right\rangle \pm \sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}}\left|l, m + \frac{1}{2}, -\right\rangle$$

(レジュメの式（5.3)、(5.4）) を代入し、ΔE を計算せよ。

問4　水素原子が光を放出し、エネルギー固有状態 $|2,1,0\rangle$ から基底状態 $|1,0,0\rangle$ へ遷移する過程がある。単位時間当たりにこの過程が起こる確率を講義に従って計算してみよう。これは、講義で用いた記号で書くと

$$
\begin{aligned}
|m\rangle &= |2,1,0\rangle \\
|n\rangle &= |1,0,0\rangle
\end{aligned}
$$

の時に A_{mn} を計算するという問題になる。

問4-1　$\langle 2,1,0|\,(\hat{x} \pm i\hat{y})\,|1,0,0\rangle$ を計算せよ。

問4-2　$\langle 2,1,0|\,\hat{z}\,|1,0,0\rangle$ を計算せよ。

問4-3　問4-1、4-2の答を用いて A_{mn} を計算せよ。ただし、問4-1、2、3の答は $\hbar, c, e, a_0$ を用いて表せ。

問4-4　$\tau \equiv (A_{mn})^{-1}$ は時間の次元を持ち、励起状態 $|2,1,0\rangle$ の寿命に当たる量である。τ を秒を単位として有効数字2桁まで求めよ。