

量子力学 II (2 学期) レポート 1

締切 : 平成 2 4 年 1 1 月 2 日 (金)

提出場所 : 自然科学系 D 棟 3 階物理専攻事務室前のロッカー

問 1 水素原子の波動関数の動径部分 $R_{nl}(r)$ は規格化条件

$$\int_0^{\infty} dr r^2 |R_{nl}(r)|^2 = 1 \quad (1)$$

を満たすように取る。

問 1-1 $R_{10}(r) = A e^{-\frac{r}{a_0}}$ を式 (1) に代入し計算することにより、定数 A を求めよ。

問 1-2 $R_{20}(r) = A' \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$ を式 (1) に代入し計算することにより、定数 A' を求めよ。

問 1-3 $R_{21}(r) = A'' \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}$ を式 (1) に代入し計算することにより、定数 A'' を求めよ。

問 1-4 水素原子の $2p$ 状態における $\frac{1}{r^3}$ の期待値を計算せよ。

問 2 2次元調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{y}^2$$

に摂動 $2b\hat{x}\hat{y}$ (b は微小) を加えることを考える :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + 2b\hat{x}\hat{y}$$

問 2-1 \hat{H}_0 の基底状態・第一励起状態のエネルギー固有値及び縮退度 (状態の数) をそれぞれ求めよ。

問 2-2 \hat{H} と \hat{H}_0 の基底状態のエネルギーのずれを b の 1 次までで求めよ。

問 2-3 \hat{H} と \hat{H}_0 の第一励起状態のエネルギーのずれを b の 1 次までで求めよ。

問 3 講義で概要を示した 2 次のシュタルク効果の厳密な計算をやってみよう。(以下記号については講義レジュメを参照のこと)

問 3-1 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2a_0}\right) \psi^{(1)}(r, \theta, \phi) = e \left| \vec{E} \right| r \cos \theta \psi_{100}(r, \theta, \phi)$$

に $\psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{2}{\rho} \chi(\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} \cos \theta$ (ただし $\rho = \frac{2r}{a_0}$) を代入して $\chi(\rho)$ に関する方程式

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{d}{d\rho} - \frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho}\right) \chi(\rho) = -\frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{4e} \left| \vec{E} \right| \rho^2 \quad (2)$$

を導出せよ。

問 3-2 $\chi(\rho) = \frac{a_0^{\frac{1}{2}}}{8e} \left| \vec{E} \right| (\rho^3 + 4\rho^2)$ が方程式 (2) の解であることを確かめよ。

問 3-3 得られた $\psi^{(1)}$ を用いて $E^{(2)} = \langle 1, 0, 0 | \hat{V} | \psi^{(1)} \rangle$ を計算せよ。