

Uncovering conformal symmetry in the 3D Ising transition: State-operator correspondence from a fuzzy sphere regularization

W. Zhu, C. Han, E. Huffman, J. Hofmann, Y. He
Phys. Rev. X 13 (2023) 2, 021009

10月24日 文献紹介
村山 祐明

この論文でやったこと

- 臨界点において共形対称性が現れることを直接検証
→ 臨界現象をCFTで調べられることを示唆
- CFTを正則化する手法を新しく導入し、
少ない計算量で既存の計算結果と良い精度で一致することを確認

CFT(共形場理論)について

- 共形変換 = 回転($M_{\mu\nu}$) + 並進(P_μ) + スケール変換(D) + 特殊共形変換(K_μ)

$$\begin{aligned} [P_\mu, D] &= iP_\mu & [M_{\mu\nu}, D] &= 0 & [P_\mu, K_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - M_{\mu\nu}) \\ [M_{\mu\nu}, K_\rho] &= i(\eta_{\nu\rho}K_\mu - \eta_{\mu\rho}K_\nu) & [D, K_\mu] &= iK_\mu \end{aligned}$$

- 対称性が高く、3点関数までは座標依存性が決定される
- string, ゲージ重力対応, CMB, 臨界現象等、適用範囲は広い
- 2Dではよく研究されているが、3D以上の解析は困難

臨界現象とCFTについて

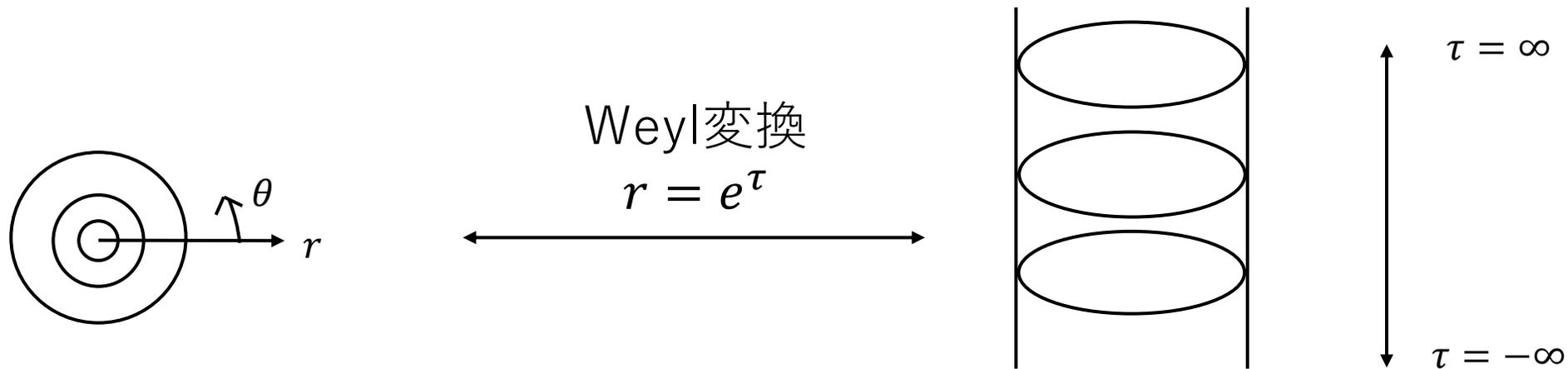
- 臨界点において共形対称性があると示唆 [Polyakov (1970)]
→ 臨界現象をCFTで解析したい
- 2Dや4Dでは、スケール不変, 回転不変, ユニタリー性を課せば
共形対称性を持つ [Polchinski (1984), Dymarsky, Komargodski, Schwimmer, Theisen (2015)]
- 3D($S^2 \times \mathbb{R}$)では証明されていない
ブートストラップ法を使った間接的な検証はされてきた
Lattice正則化だと非自明な曲率を考慮する必要があり非常に困難
Fuzzy sphereで直接的な検証ができた

primary/descendant operator

- primary operator: 特殊共形変換と可換な演算子
- descendant operator: primaryに並進演算子を複数回かけたもの
- 全てのprimary, descendantはスケール変換と回転の固有値 (Δ, l) でラベリングできる
- (Δ, l) のprimary operator $\mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}$ に対しdescendantは2通り作れる:
 - ① $\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_j} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \square^n \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}$ $(\Delta + 2n + j + i, l + j - i)$
 - ② $\epsilon_{\mu_l \rho \tau} \partial_\rho \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_j} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_i} \square^n \mathcal{O}_{\mu_1 \dots \mu_l}$ $(\Delta + 2n + j + i + 1, l + j - i)$
- CFTのoperatorはprimaryかdescendantのみ

動径量子化と state-operator correspondence

- 動径量子化: 動径方向を時間に見立てた量子化
スケール変換が時間発展に対応
- $\delta E_n = E_n - E_0 = \Delta/r$
- 例) 2D の場合: $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R} \times S^1$



共形対称性があれば対応がするが、正則化で対称性は破れる
→fuzzy sphere正則化なら良い精度で保つことを示す

Lowest Landau Level (LLL) on sphere [F. Haldane, 1983]

- 電子(質量 M)が S^2 (半径 r)上にあり、 S^2 の中心に $4\pi s$ のmonopoleがあるとする。 $(2s \in \mathbb{Z})$ monopoleのゲージ場
↓

→ハミルトニアンは
$$H = \frac{\Lambda_i^2}{2Mr^2}, \quad \Lambda_i = -i\epsilon_{ijk}x_j(\partial_k + A_k)$$

- $SU(2)$ 代数を満たすためには、生成子に補正項が必要:

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \quad L_i = \Lambda_i + s\frac{x_i}{r}$$

- エネルギースペクトルを求めると

$$E_n = \frac{(n+s)\{(n+s)+1\} - s^2}{2Mr^2} = \frac{n(n+1) + (2n+1)s}{2Mr^2}$$

- 縮退度は $2s + 2n + 1$

- LLLは $n = 0$ に対応(相互作用が十分小さければ実現)

Fuzzy Sphere [Hoppe 1982, J. Madole, 1992]

- LLLに射影すると、 $L_i \sim s \frac{\tilde{x}_i}{r}$
→fuzzy sphere: $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = i \frac{r}{s} \epsilon_{ijk} \tilde{x}_k$
- 普通の S^2 : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ $[x_i, x_j] = 0$
LLL射影は $x_i \rightarrow \tilde{x}_i = \frac{r}{s} J_i$ (J_i は $SU(2)$ 生成子) の行列正則化に対応
→非可換性から不確定性が生じる・・・"fuzzy"
- 相空間が分割され、UV cutoffが与えられる
(行列サイズ $2s + 1$ が運動量に対応、 $s \rightarrow \infty$ で普通の S^2 に戻る)
- 回転対称性を破らないので動径量子化と相性が良い

計算する模型:3D Ising

- ハミルトニアン:

$$H = \int (2s + 1)^2 d\Omega_a d\Omega_b U(\Omega_{ab}) [n^0(\Omega_a)n^0(\Omega_b) - n^z(\Omega_a)n^z(\Omega_b)] \\ - h \int (2s + 1) d\Omega n^x(\Omega)$$

$$U(\Omega) = \frac{g_0}{R^2} \delta(\Omega) + \frac{g_1}{R^4} \nabla^2 \delta(\Omega) \quad n^\alpha = (\hat{\psi}_\uparrow^\dagger, \hat{\psi}_\downarrow^\dagger) \sigma^\alpha \begin{pmatrix} \hat{\psi}_\uparrow \\ \hat{\psi}_\downarrow \end{pmatrix}$$

- fuzzy sphere正則化すると、(電子の)消滅演算子は

$$\hat{\psi}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2s + 1}} \sum_m \Phi_m^*(\Omega) c_m \quad \Phi_m(\Omega) = N_m e^{im\varphi} \cos^{s+m}(\theta/2) \sin^{s-m}(\theta/2) \\ c_m: mモードの消滅演算子$$

計算する模型:3D Ising

- $H = H_{00} + H_{zz} + H_t$

H_{00} : Ising spinには関係ない。

$$H_{zz} = -\frac{1}{2} \sum_{m_i} V_{m_i} (c_{m_1}^\dagger \sigma_z c_{m_4}) (c_{m_2}^\dagger \sigma_z c_{m_3}) \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4}$$

$$V_{m_i} = \sum_{l=0,1} V_l \cdot (4s - 2l + 1) \begin{pmatrix} s & s & 2s - l \\ m_1 & m_2 & -m_1 - m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & s & 2s - l \\ m_4 & m_3 & -m_3 - m_4 \end{pmatrix}$$

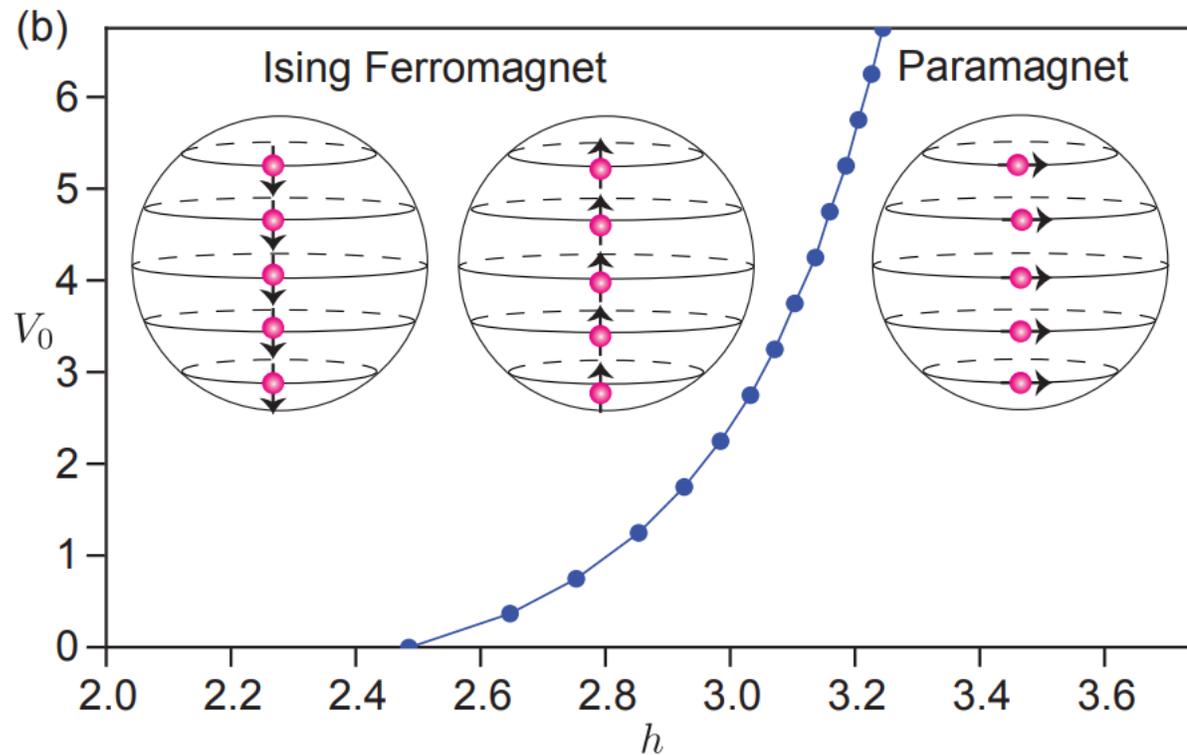
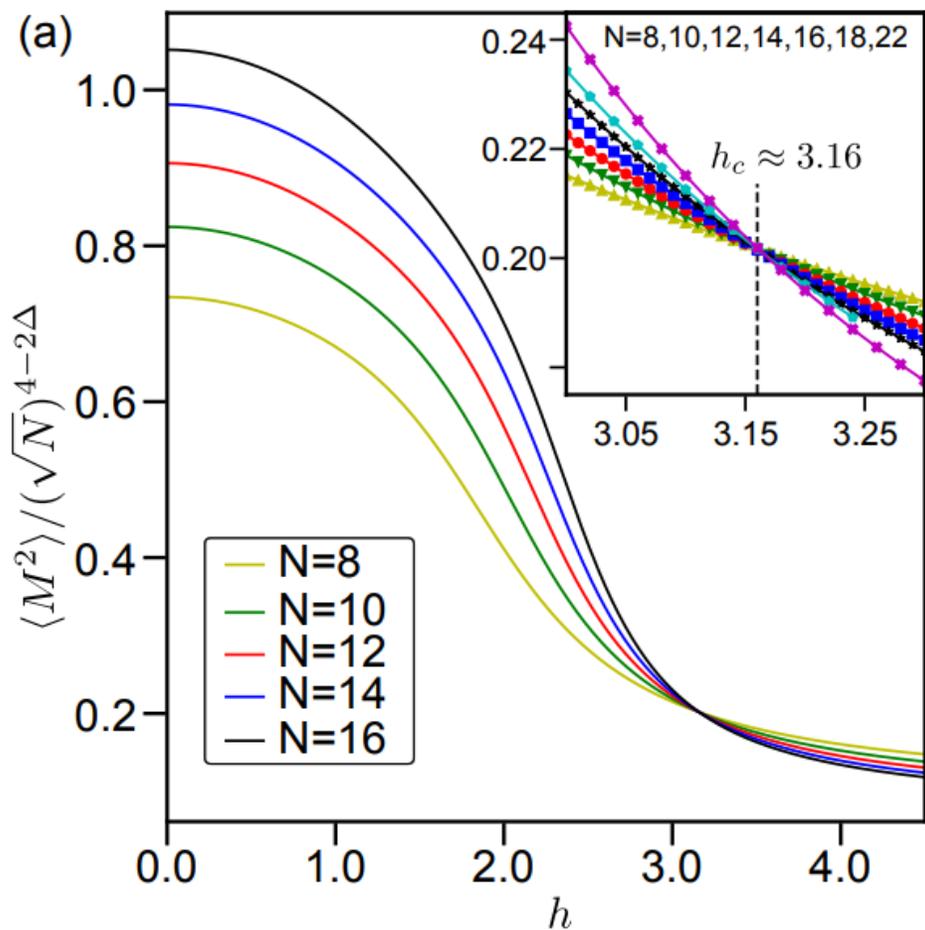
$$H_t = -h \sum_m c_m^\dagger \sigma_x c_m$$

赤の値を変えて相図を調べる

臨界点の探索

- order parameter: $M = \sum_m c_m^\dagger \frac{\sigma_z}{2} c_m$ を使って finite size scaling ($V_1 = 1$ と fix)

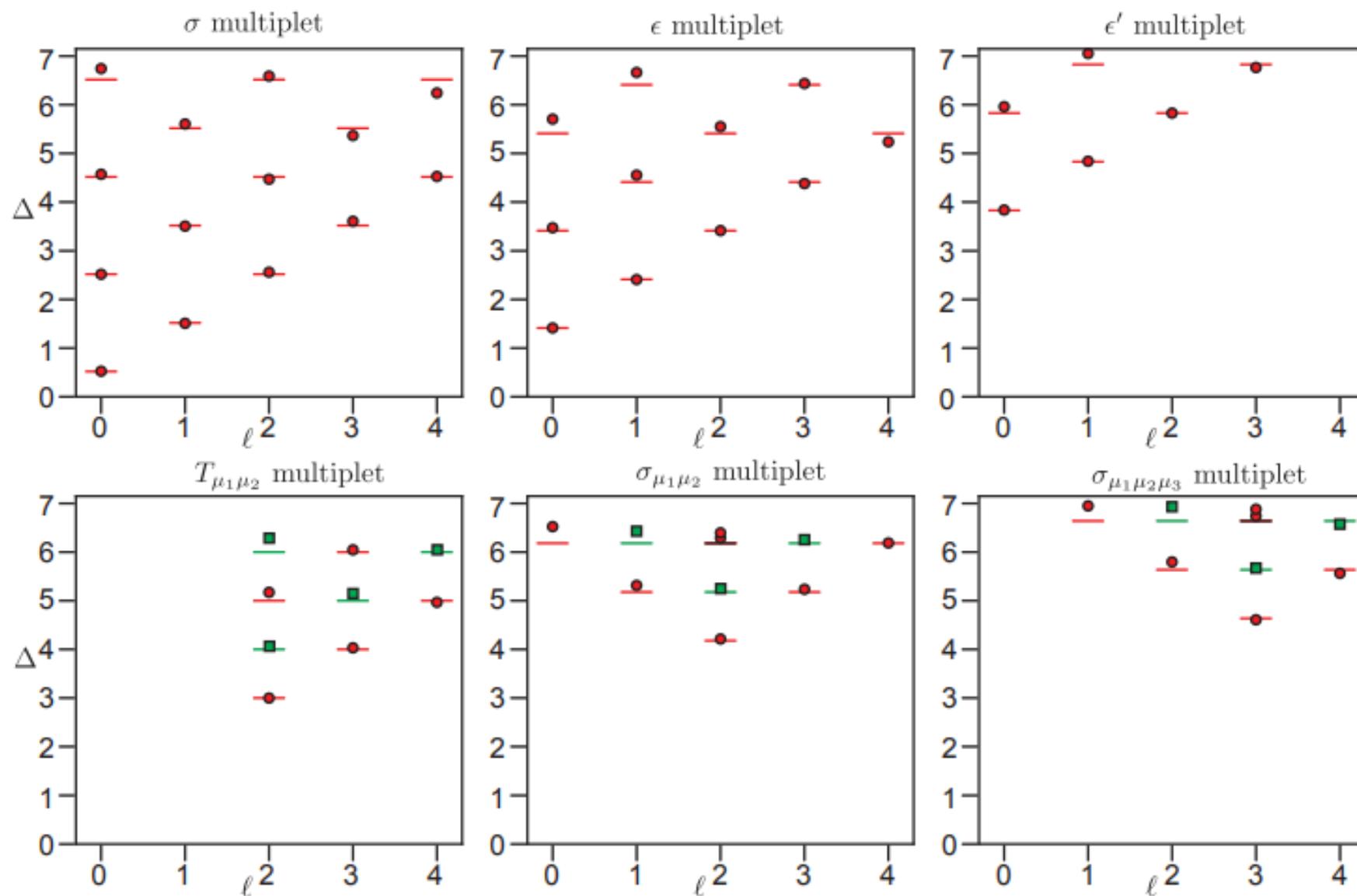
$V_0 = 4.75$ としてる



state-operator correspondence

- $(V_0, V_1, h_c) = (4.75, 1, 3.16)$ で計算する
- やること: ハミルトニアンを臨界点で対角化してエネルギーを求める
3D CFTでのスケール次元 Δ と比較
→ $\delta E_n = E_n - E_0 = \Delta/r$ となるか確認することで共形対称性を直接検証
- 手順
 - ① 最小の Δ に対応する状態をprimaryと同定、検証
 - ② $\Delta \leq 7$ の範囲で①のdescendantを作成、検証
 - ③ 同定したprimaryとそれから作ったdescendant以外で①②を繰り返す
- 結果: lowestの70個に対して示せた

計算結果



共形ブートストラップとの比較

Operator	Quantum Number	CB data	$N = 16$	Errors	Operator	Quantum Number	Exact value	$N = 16$	Errors
ϵ	$l = 0$	1.412625(10)	1.41355766	0.066%	$T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2$	3	3	0.000%
$\partial_\mu \epsilon$	$l = 1$	2.412625(10)	2.40776449	0.201%	$\partial_{\nu_1} T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 3$	4	4.03219819	0.805%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \epsilon$	$l = 2$	3.412625(10)	3.41455749	0.057%	$\epsilon_{\mu_2\rho\tau} \partial_\rho T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2, P = -1$	4	4.07392075	1.848%
$\square \epsilon$	$l = 0$	3.412625(10)	3.47303235	1.770%	$\partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 4$	5	4.96734107	0.653%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \epsilon$	$l = 3$	4.412625(10)	4.38113022	0.714%	$\epsilon_{\mu_2\rho\tau} \partial_\rho \partial_{\nu_1} T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 3, P = -1$	5	5.14602926	2.921%
$\square \partial_\mu \epsilon$	$l = 1$	4.412625(10)	4.55437869	3.212%	$\square T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2$	5	5.17292963	3.459%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \partial_{\mu_4} \epsilon$	$l = 4$	5.412625(10)	5.2379631	3.227%	$\partial_{\nu_1} \square T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 3$	6	6.04586808	0.764%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \square \epsilon$	$l = 2$	5.412625(10)	5.5514904	2.566%	$\epsilon_{\mu_2\rho\tau} \partial_\rho \partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 4, P = -1$	6	6.06221026	1.037%
$\square^2 \epsilon$	$l = 0$	5.412625(10)	5.70570641	5.415%	$\epsilon_{\mu_2\rho\tau} \partial_\rho \square T_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2, P = -1$	6	6.29074558	4.846%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \square \epsilon$	$l = 3$	6.412625(10)	6.43712303	0.382%	Operator	Quantum Number	CB data	$N = 16$	Errors
$\partial_{\mu_1} \square^2 \epsilon$	$l = 1$	6.412625(10)	6.66423677	3.924%	$T'_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2$	5.50915(44)	5.5827144	1.335%
ϵ'	$l = 0$	3.82968(23)	3.83772859	0.210%	$\partial_{\nu_1} T'_{\mu_1\mu_2}$	$l = 3$	6.50915(44)	6.57137975	0.956%
$\partial_{\mu_1} \epsilon'$	$l = 1$	4.82968(23)	4.83973617	0.208%	$\epsilon_{\mu_2\rho\tau} \partial_\rho T'_{\mu_1\mu_2}$	$l = 2, P = -1,$	6.50915(44)	6.57557892	1.020%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \epsilon'$	$l = 2$	5.82968(23)	5.82918219	0.009%	$\partial_{\mu_1} T'_{\mu_1\mu_2}$	$l = 1$	6.50915(44)	6.74639599	3.645%
$\square \epsilon'$	$l = 0$	5.82968(23)	5.9605325	2.245%	$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$	$l = 4$	5.022665(28)	5.1029942	1.599%
$\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \epsilon'$	$l = 3$	6.82968(23)	6.76617638	0.930%	$\epsilon_{\mu_4\rho\tau} \partial_\rho \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$	$l = 4, P = -1$	6.022665(28)	6.17684693	2.560%
$\partial_{\mu_1} \square \epsilon'$	$l = 1$	6.82968(23)	7.05458433	3.293%	$\partial_{\mu_1} \epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$	$l = 3$	6.022665(28)	6.19439341	2.851%

共形ブートストラップとの比較

Operator	Quantum number	CB data	$N = 16$	Errors	Operator	Quantum number	CB data	$N = 16$	Errors
σ	$\ell = 0$	0.5181489(10)	0.52428857	1.185%	$\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 2$	4.180305(18)	4.21382989	0.802%
$\partial_\mu\sigma$	$\ell = 1$	1.5181489(10)	1.50941793	0.575%	$\partial_{\nu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 3$	5.180305(18)	5.23649044	1.085%
$\square\sigma$	$\ell = 0$	2.5181489(10)	2.51722181	0.037%	$\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 1$	5.180305(18)	5.31575894	2.615%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\sigma$	$\ell = 2$	2.5181489(10)	2.55937503	1.637%	$\varepsilon_{\mu_2\rho\tau}\partial_\rho\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 2, P = -1$	5.180305(18)	5.25415317	1.426%
$\square\partial_\mu\sigma$	$\ell = 1$	3.5181489(10)	3.50635346	0.335%	$\partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 4$	6.180305(18)	6.18724938	0.112%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\sigma$	$\ell = 3$	3.5181489(10)	3.6059226	2.495%	$\varepsilon_{\mu_2\rho\tau}\partial_\rho\partial_{\nu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 3, P = -1$	6.180305(18)	6.26160085	1.315%
$\square\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\sigma$	$\ell = 2$	4.5181489(10)	4.47002281	1.065%	$\partial_{\nu_1}\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 2$	6.180305(18)	6.29114975	1.794%
$\square^2\sigma$	$\ell = 0$	4.5181489(10)	4.57231367	1.199%	$\square\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 2$	6.180305(18)	6.39595149	3.489%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\partial_{\mu_4}\sigma$	$\ell = 4$	4.5181489(10)	4.52727499	0.202%	$\varepsilon_{\mu_2\rho\tau}\partial_\rho\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 1, P = -1$	6.180305(18)	6.42999132	4.040%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\square\sigma$	$\ell = 3$	5.5181489(10)	5.36761913	2.728%	$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\sigma_{\mu_1\mu_2}$	$\ell = 0$	6.180305(18)	6.52321841	5.548%
$\partial_\mu\square^2\sigma$	$\ell = 1$	5.5181489(10)	5.60563429	1.585%	$\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 3$	4.63804(88)	4.60892045	0.628%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\partial_{\mu_4}\square\sigma$	$\ell = 4$	6.5181489(10)	6.24268467	4.226%	$\partial_{\nu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 4$	5.63804(88)	5.56345584	1.323%
$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\square^2\sigma$	$\ell = 2$	6.5181489(10)	6.58905267	1.088%	$\varepsilon_{\mu_3\rho\tau}\partial_\rho\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 3, P = -1$	5.63804(88)	5.6704459	0.575%
$\square^3\sigma$	$\ell = 0$	6.5181489(10)	6.74334514	3.455%	$\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 2$	5.63804(88)	5.79746571	2.828%
σ'	$\ell = 0$	5.2906(11)	5.30346641	0.243%	$\square\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 3$	6.63804(88)	6.74065848	1.546%
$\partial_{\mu_1}\sigma'$	$\ell = 1$	6.2906(11)	6.27713785	0.214%	$\partial_{\nu_1}\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 3$	6.63804(88)	6.88182226	3.672%
					$\varepsilon_{\mu_3\rho\tau}\partial_\rho\partial_{\nu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 4, P = -1$	6.63804(88)	6.57417625	0.962%
					$\varepsilon_{\mu_3\rho\tau}\partial_\rho\partial_{\mu_1}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 2, P = -1$	6.63804(88)	6.93133276	4.418%
					$\partial_{\mu_1}\partial_{\mu_2}\sigma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$	$\ell = 1$	6.63804(88)	6.9490099	4.685%

まとめと展望

- 3D Ising modelにおいて、直接共形対称性を検証できた。
- CFTを解析する新しい手法としてfuzzy sphere正則化を導入した。
少ない計算量で既存のブートストラップ法と無矛盾。
- OPE、相関関数、fermionを含む系等への拡張
- 非可換幾何の言葉に書き直すことで知見が広がるかも？
UV/IR mixing回避の可能性