# Duality of Euclidean type IIB geometry and the mass deformed IKKT Matrix model

**Review of S. Komatsu, A. Martina, J. Penedones, A. Vuignier, X. Zhao**

**arXiv:2410.18173　arXiv:2411.18678**


**筑波大学博士前期課程2年**

**ランカスター海**


**10,17,2025**

# Introduction

- Matrix model

超弦理論の非摂動的な定式化の候補

力学変数に行列を用いる理論

行列によって幾何学的な多体系の記述が可能

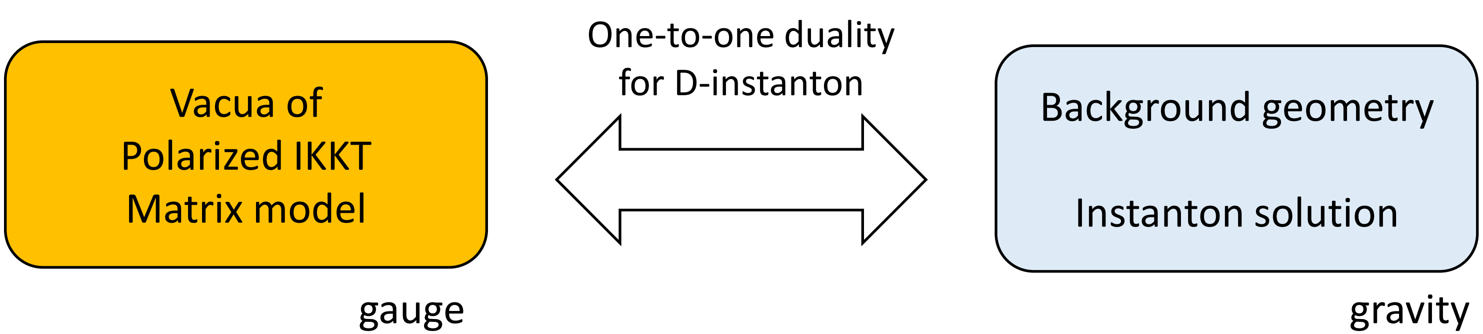
時空は行列の自由度からダイナミカルに創発される

⇒　行列模型が重力を記述するのでは？

# Introduction(Matrix modelの描像)

IKKT Matrix Model
・平坦時空中におけるType IIB string theory の非摂動的な記述として提起されたもの
・SO(10)対称性　０D theory

これにmass parameter Ωを入れて定義されるPolarized IKKT matrix modelを扱う



# Polarized IKKT Matrix model (1)

(Focus on Euclidean signature)

$$S_{\Omega} = S_{\mathrm{IKKT}} + S_{\mathrm{def}}$$

$$S_{\mathrm{IKKT}} = -\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{4}\sum_{I,J=1}^{10}\left[X_I, X_J\right]^2 + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{32}\sum_{I=1}^{10}\psi_\alpha(\mathcal{C}\Gamma^I)_{\alpha\beta}\left[X_I, \psi_\beta\right]\right]$$

$$S_{\mathrm{def}} = \mathrm{Tr}\left[\frac{3\Omega^2}{4^3}\sum_{i=1}^{3}X_iX_i + \frac{\Omega^2}{4^3}\sum_{p=4}^{10}X_pX_p + i\,\frac{\Omega}{3}\epsilon_{ijk}X_iX_jX_k - \frac{\Omega}{8}\psi_\alpha(\mathcal{C}\Gamma^{123})_{\alpha\beta}\psi_\beta\right]$$

SO(3) $\times$ SO(7)symmetry

SUSY : $\begin{cases} \delta X^I = -\psi_\alpha(\mathcal{C}\Gamma^I)_{\alpha\beta}\epsilon_\beta \\ \delta\psi_\alpha = \frac{i}{2}\left[X_I, X_J\right]\Gamma^{IJ}_{\alpha\beta}\epsilon_\beta + X_i\left(\Gamma^{123}\Gamma^i\right)_{\alpha\beta}\epsilon_\beta + \frac{\Omega}{8}X_p(\Gamma^{123}\Gamma^p)_{\alpha\beta}\epsilon_\beta \end{cases}$

# Polarized IKKT Matrix model (2)

作用から古典解を求める。

$$V_{\mathrm{B}}=\mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{4}\sum_{I,J=1}^{10}[X_I,X_J]^2+\frac{3\Omega^2}{4^3}\sum_{i=1}^{3}X_iX_i+\frac{\Omega^2}{4^3}\sum_{p=4}^{10}X_pX_p+\frac{i\Omega}{3}\epsilon_{ijk}X_iX_jX_k\right]$$

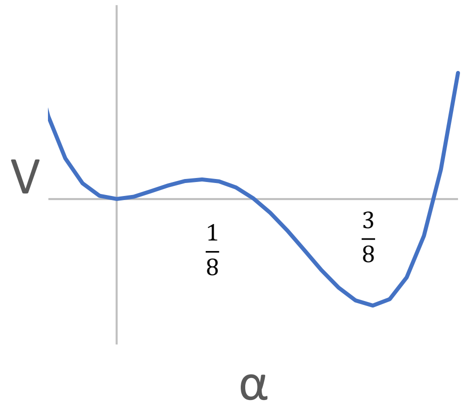
Equation of Motion($\psi=0$)

①$\mathrm{X_p}(p=4,\ldots,10)$: $\frac{1}{2}\left[X_I,[X_I,X_p]\right]+\frac{3\Omega^2}{4^3}X_p=0$

$$\Rightarrow\quad \textbf{解}\mathbf{:}\ \boldsymbol{X_p=0}$$

②$\mathrm{X_i}(\mathrm{i}=1,2,3)$: $\frac{1}{2}[X_I,[X_I,X_i]]+\frac{3\Omega^2}{4^3}X_i+\frac{i\Omega}{4}\epsilon_{ijk}[X_j,X_k]=0$

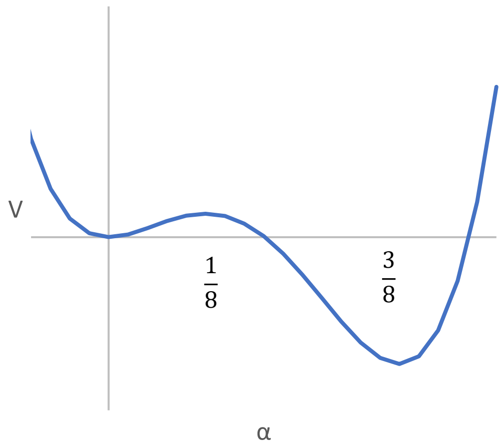
$$\Rightarrow \textbf{解}\mathbf{:}\ \boldsymbol{X_i=\alpha\Omega J_i}\quad \boldsymbol{\left([J_i,J_j]=i\epsilon_{ijk}J_k,\ \alpha=0,\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right)}$$




②について
$J_i$:SU(2)Lie代数の$N\times N$行列表現

# Polarized IKKT Matrix model (3)

$X_i = \frac{3}{8}\Omega J_i$が古典解 : $\boldsymbol{S_\Omega = -\frac{9}{2^{13}}\Omega^4 \mathrm{Tr} J_i J_i}$



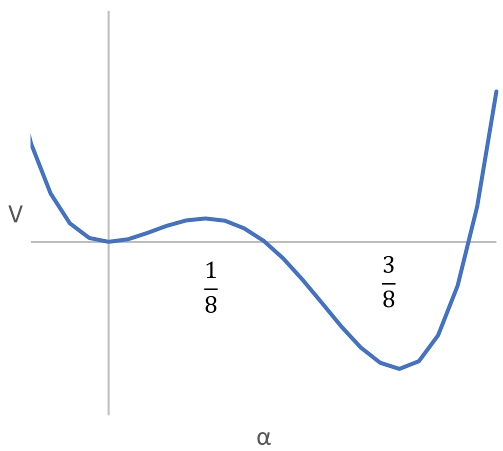

☆$\alpha = 0, \frac{3}{8}$の時、$\delta\psi = 0$を満たすことが示せる

# Polarized IKKT Matrix model (3)

$X_i = \frac{3}{8}\Omega J_i$が古典解：$\boldsymbol{S_\Omega = -\frac{9}{2^{13}}\Omega^4 \mathrm{Tr} J_i J_i}$

$\mathrm{J_i}$がスピンj既約表現(N=2j+1)であれば

$$\mathrm{Tr} J_i J_i = N\frac{N^2-1}{4}$$




一般の(可約)表現において

$$\mathrm{Tr} J_i J_i = \sum_{s=1}^{q} n_s N_s \frac{N_s^2-1}{4} \quad \left( N = \sum_{s=1}^{q} n_s N_s \right)$$

$$X^i = \frac{3\Omega}{8}\begin{pmatrix} \square & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \square \end{pmatrix} N \qquad \square : n_s \times n_s$$

($n_s$: 多重度, $N_s$ : ブロックの次元)

☆$\alpha = 0, \frac{3}{8}$の時、$\delta\psi = 0$を満たすことが示せる

$$S_\Omega = -\frac{9}{2^{15}}\Omega^4 \sum_{s=1}^{q} n_s N_s (N_s^2 - 1)$$

... $J_i$が既約の時に最小になる

# Gravity : geometry

$(\rho, z)$: $S^2 \times S^6$に直交する座標
$\mu$:mass parameter $\propto \Omega$
$V' \equiv \partial_z V$ , $\dot{V} \equiv \partial_\rho V$

Matrix modelの対称性SO(3)×SO(7)に対応するような重力解を仮定

From The Einstein equation

The Einstein frame solution (with SO(3)×SO(7) isometry)

$$ds^2 = \frac{8}{\mu^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{1}{3^3}\frac{\Delta \dot{V}}{-V''}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{-V''}{\dot{V}}(d\rho^2 + dz^2) + \underbrace{3\rho d\Omega_6^2}_{S^6} + \underbrace{\frac{\rho(-V'')\dot{V}}{\Delta} d\Omega_2^2}_{S^2}\right]$$

$$e^{\phi} = -\mu \frac{3\dot{V} + \rho V''}{\rho\sqrt{3\Delta \dot{V}(-V'')}} \; , \qquad \chi = -\frac{i}{\mu^3}\frac{3\dot{V}(V' + \rho V') + \rho V' V''}{3\dot{V} + \rho V''}$$

$$\Delta \equiv 3\dot{V}V'' + \rho\left(\dot{V}'^2 + V''^2\right)$$

Function V : 4D axi-sym. Laplace eq $\left(V'' + \ddot{V} + \frac{2}{\rho}\dot{V} = 0\right)$を満たす

# Gravity：metricの追加条件

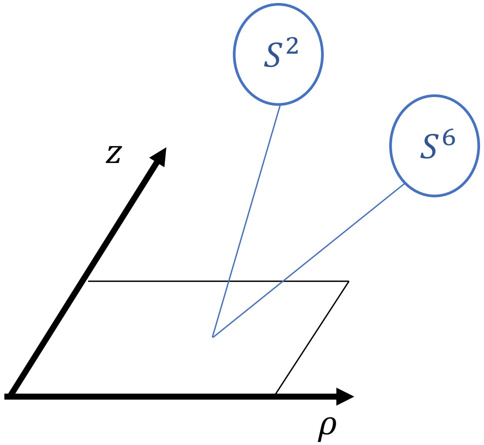
**Positivity**

$$V_{\mathrm{BG}} = -\eta z \mu^3 + \frac{\mu^5}{2^7}(z\rho^2 - z^3) \qquad \because \text{Laplace eq.}$$

**Regularity**

$S^2$ and/or $S^6$の収縮する領域　　$(R_2, R_6 \to 0)$

境界条件　「1つの球面が収縮するときに
metricの他の成分が有限」

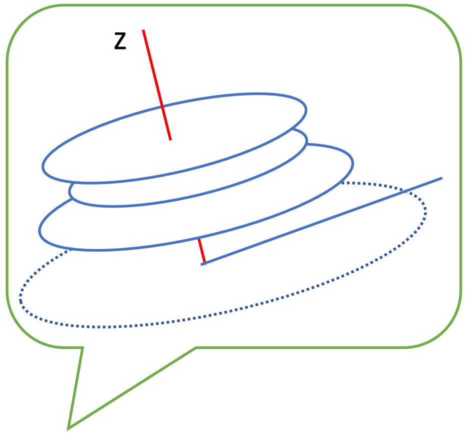



$$ds^2 = R_2(\rho,z)^2 d\Omega_2^2 + R_6(\rho,z)^2 d\Omega_6^2 + H(\rho,z)^2(d\rho^2 + dz^2)$$

# Gravity：metricの追加条件

**Positivity**

$$V_{\mathrm{BG}} = -\eta z \mu^3 + \frac{\mu^5}{2^7}(z\rho^2 - z^3) \qquad \because \text{ Laplace eq.}$$




**Regularity**

$S^2$ and/or $S^6$の収縮する領域　　$(R_2, R_6 \to 0)$

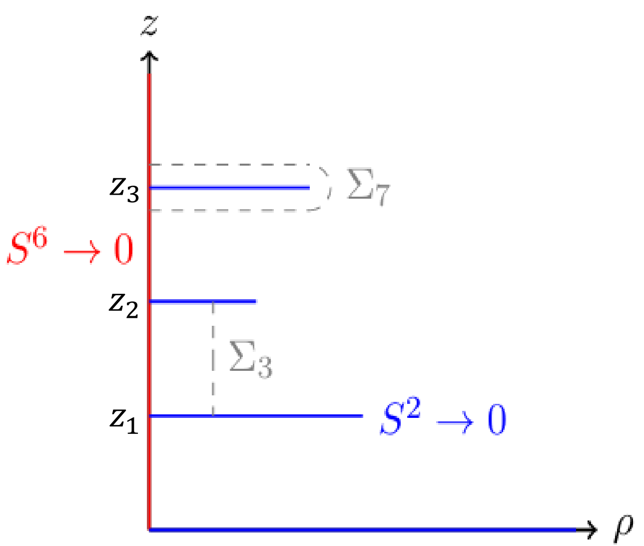
境界条件　「1つの球面が収縮するときに
metricの他の成分が有限」

$$S^2 \text{ shrink : } \dot{V} \to 0\,, \frac{\delta z}{\delta \rho} = 0$$

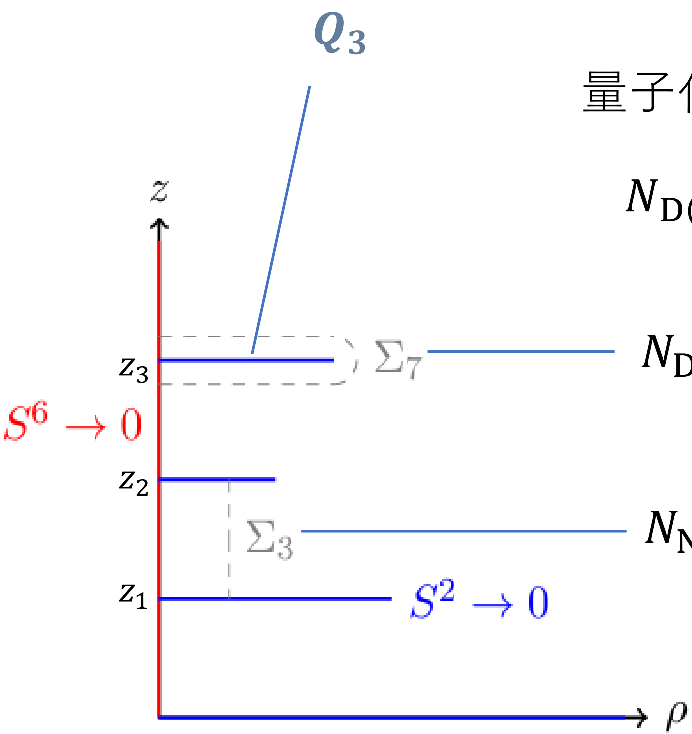
∴導体円盤

$$S^6 \text{shrink : } \rho \to 0$$

∴z軸



# Gravity : Quantization of fluxes




量子化条件

$$N_{\mathrm{D}(-1)} \propto \int_{S^9} \widetilde{F_9}$$

$$N_{\mathrm{D1},s} \propto \int_{\Sigma_7} \widetilde{F_7}$$

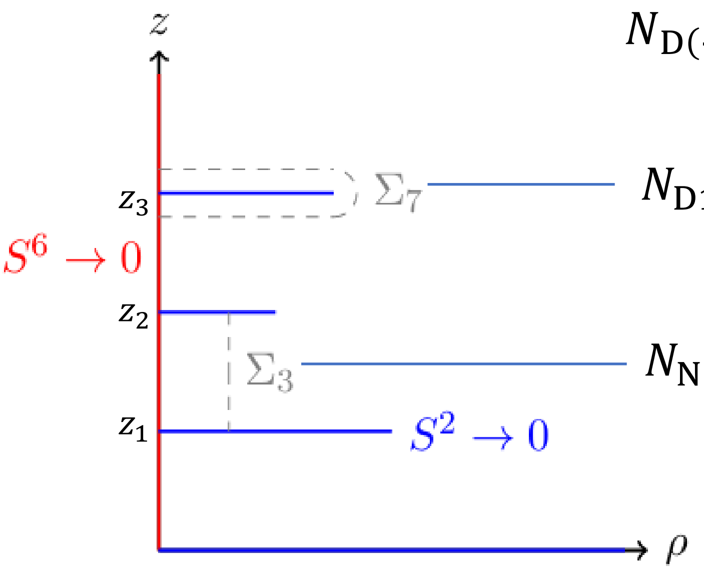
$$N_{\mathrm{NS5},s} \propto \int_{\Sigma_3} H_3$$

$$N_{D(-1)} = \sum_{s} N_{\mathrm{D1},s} \sum_{t \leq s} N_{\mathrm{NS5},t}$$

$$N_{\mathrm{F1}} = 0 \ , \qquad N_{\mathrm{D5}} \propto \Delta V$$

# Gravity : Quantization of fluxes

量子化条件




$$N_{\mathrm{D}(-1)} \propto \int_{S^9} \widetilde{F_9}$$

$$N_{\mathrm{D1},s} \propto \int_{\Sigma_7} \widetilde{F_7} \quad \sim Q_s$$

$$N_{\mathrm{NS5},s} \propto \int_{\Sigma_3} H_3 \quad \sim d_s$$

$$N_{D(-1)} = \sum_s N_{\mathrm{D1},s} \sum_{t \leq s} N_{\mathrm{NS5},t}$$

$$d_s \equiv z_s - z_{s-1}$$

$$N_{\mathrm{F1}} = 0 \ , \qquad N_{\mathrm{D5}} \propto \Delta V$$

# Duality

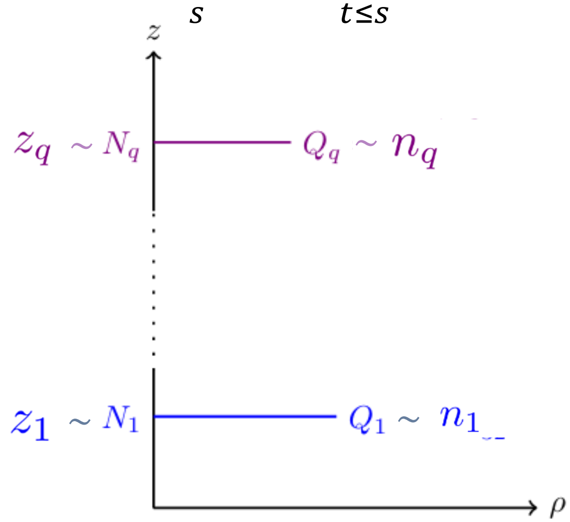
真空は3つのSU(2)の随伴行列を持つfuzzy sphere

$$J^i = \bigoplus_{s=1}^{q} \mathbb{1} \otimes J^i_{N_s} \qquad (i = 1,2,3)$$

$\mu \propto \Omega \because$ D1brane analysis

**IIB SUGRA** **(parameter $\mu$)**

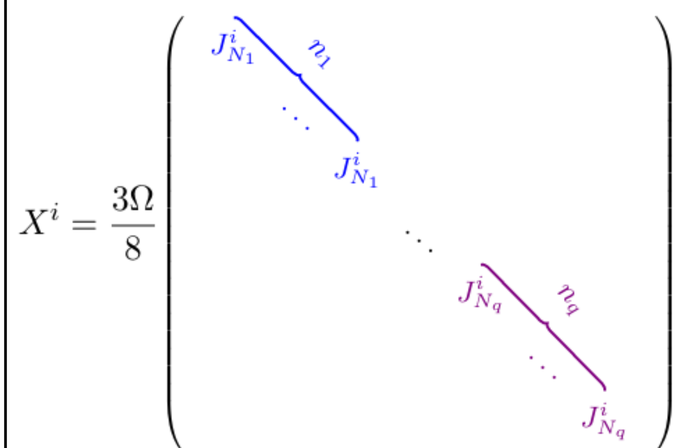
$$N_{\mathrm{D}(-1)} = \sum_s N_{D1,s} \sum_{t \le s} N_{\mathrm{NS5},t}$$




⇔

**Polarized IKKT Matrix model (parameter $\Omega$)**

$$N = \sum_s n_s N_s$$



# Duality

- Braneの量子数がSU(2)既約表現の次元および縮退度と対応
- 超重力解が行列模型の古典的な解(fuzzy sphere) と一対一対応

# Duality

- Braneの量子数がSU(2)既約表現の次元および縮退度と対応
- 超重力解が行列模型の古典的な解(fuzzy sphere) と一対一対応

重力解Vが行列模型から再現できるか？

→ 分配関数を局所化の方法で計算する

cf.BMN Matrix Model(Y. Asano, G. Ishiki, T. Okada, S. Shimasaki)

# Localization

１つの超対称性$\delta_s$を選択 ($\delta_s S = 0$)
次のdeformed partition functionを定義

$$\boxed{Z_t \equiv -\int [dX^I][d\psi_\alpha]\exp\left[-(S + t\delta_s V)\right]}$$

$\delta_s^2 V = 0$を仮定すると$\dfrac{d}{dt}Z_t = 0$

・・・$Z_t$はtに依存せず$Z_{t=0} = \lim_{t\to\infty} Z_t$

$\delta_s V$のpure bosonic partが非負なら$t \to \infty$で<u>Saddle周りの1-loop計算がexact</u>

# Super symmetry

$$Z_t \equiv -\int [dX^I][d\psi_\alpha]\exp\left[-(S + t\delta_s V)\right]$$

経路積分はOff-Shellも含む

→　SUSYをOff-shellの場合も込みで考える

補助場$K_a$　$(a = 1,2,\cdots 7)$を導入

$$S \ = Tr\left[-\frac{1}{4}\left[X_I, X_J\right]^2 - \frac{1}{2}\psi^T\bar{\gamma}^I[X_I,\psi] + \frac{1}{2}\ K_a K_a + \frac{3\Omega^2}{4^3}X_i X_i \right.$$
$$\left. + \frac{\Omega^2}{4^3}X_p X_p + i\epsilon^{ijk}X_i X_j X_k + \frac{i}{8}\Omega\psi^T\bar{\gamma}^{123}\psi\right]$$

# Saddle point

$t \to \infty$で<u>1-loop計算がexact</u>

$$Z_t \equiv -\int [dX^I][d\psi_\alpha]\exp\left[-(S + t\delta_s V_0)\right]$$

$V_0 = \mathrm{Tr}\left[\psi_\alpha(\delta_s\psi_\alpha)^\dagger\right]$ と指定。 $\delta_s V_0$のPure bosonic partが非負という条件より鞍点は

$$X_i = \frac{3\Omega}{8}L_i, \qquad X_{10} = M, \qquad K_7 = -\frac{\Omega}{8}M, \qquad X_{p'} = 0,$$

$$K_{a'} = 0, \qquad \psi = 0$$

Where $\left[L_i, L_j\right] = i\epsilon_{ijk}L_k \;, [L_i, M] = 0$

$$L_i = \mathrm{diag}\left(\mathbb{I}_{n_s} \otimes L_i^{[J_s]}\right)_{s=1,2,\cdots q} \;, M = \mathrm{diag}\left(M_s \otimes \mathbb{I}_{N_s}\right)_{s=1,2,\cdots q}$$

☆ただしgauge redundancy $L_i \to UL_iU^\dagger$ ,$M \to UMU^\dagger$を持つ

また、 $M_s$はゲージ対称性を用いて対角化できる

$$M_s = \mathrm{diag}\left(m_{s_i}\right)_{i=1,2,\cdots n_s}$$

# Gauge fixing and Faddeev-Popov ghost

分配関数Zを鞍点ごとの和として$Z=\sum_R Z_R$と書く
これまでの場を$\Phi$、新しく考えるghost場を$\Phi_{\mathrm{ghost}}$でまとめると

(この時BRST変換($\delta_b$)でghost actionを定式化)

新しく演算子$\mathrm{Q}=\delta_s+\delta_b$を導入して

⇩

$$\mathrm{Z_R}=\int[d\Phi]e^{-(S+t\delta_s V_0)}\sim Vol(\mathcal{G}_R)\int[d\Phi][d\Phi_{ghost}]e^{-(S+tQV)}$$

$$\text{where}\quad \mathcal{G}_R=\frac{U(N)}{\bigotimes_{s=1}^{q}U(n_s)}$$

# Saddle point approximation (1)

$$\mathrm{Z_R} \sim Vol(\mathcal{G}_R) \int [d\Phi][d\Phi_{\mathrm{ghost}}] e^{-(S+tQV)}$$

$Z = \hat{Z}$(鞍点)$+ \frac{1}{\sqrt{t}} \tilde{Z}$(摂動)のように展開

# Saddle point approximation (1)

$$Z_R \sim Vol(\mathcal{G}_R)\int [d\Phi][d\Phi_{\text{ghost}}]e^{-(S+tQV)}$$

$Z = \hat{Z}$(鞍点) $+\frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{Z}$(摂動)のように展開

$$S[Z] + tQV[Z] = S[\hat{Z}] + \tilde{Z}D\tilde{Z} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

$$S[\hat{Z}] = \underbrace{-\frac{9\Omega^4}{2^{13}}\mathrm{Tr}L_i^2}_{} + \underbrace{\frac{3\Omega^2}{2^7}\mathrm{Tr}M^2}_{}$$

古典解$\left(X_i = \frac{3}{8}\Omega L_i\right)$より　　鞍点での補助場$\left(K_7 = -\frac{\Omega}{8}M\right)$より

→ **計算する残りの部分は$tQV$の部分 : 1-loopの寄与にあたる**

# Saddle point approximation (2)

$tQV[Z] = \tilde{Z}D\tilde{Z}$について

変数を次のように分類

$\mathrm{Z} \ni Z_b, Z_f$

$Z_b$ : $X_{I'}, K_a, bosonic\ ghost$

$Z_f$ : $\psi, fermionic\ ghost$

$$QZ_b = R_{bf}Z_f, QZ_f = R_{fb}Z_b,$$

@Saddle point

$$R_{bf}, R_{fb} \ni -i\Omega\delta_{U(1)} + i\left[\,\cdot\,, M + \mathrm{i}\frac{3\Omega}{8}\mathrm{L}_3\right]$$

$\delta_{U(1)}$:SO(3)×SO(7)のU(1)部分群

# Saddle point approximation (2)

$tQV[Z] = \tilde{Z}D\tilde{Z}$について

$QZ_b = R_{bf}Z_f, QZ_f = R_{fb}Z_b,$

@Saddle point

$R_{bf}, R_{fb} \ni -i\Omega\delta_{U(1)} + i\left[\cdot, M + \mathrm{i}\frac{3\Omega}{8}\mathrm{L}_3\right]$

$\delta_{U(1)}$:SO(3)×SO(7)のU(1)部分群

変数を次のように分類

$\mathrm{Z} \ni Z_b, Z_f$
$Z_b : X_{I'}, K_a, bosonic\ ghost$
$Z_f : \psi, fermionic\ ghost$

$$V = Z_f D Z_b$$

$$\Rightarrow \quad QV \to \tilde{Z}_b\left(R_{fb}^T D\right)\tilde{Z}_b - \tilde{Z}_f\left(DR_{bf}\right)\tilde{Z}_f \ (t \to \infty)$$

$R_0$ のZに対する固有値を用いて1-loopの計算に帰着できる

$$\int e^{-tQV} \sim Z_{1-\mathrm{loop}} \sim \frac{\left(\mathrm{det}R_{bf}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathrm{det}R_{fb}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

# Saddle point approximation (3)

$M_s = diag\left(\underbrace{m_{s_i}}_{}\right)_{i=1,2,\cdots n_s}$ の対角化から生じるVandermonde 行列式 $\Delta = \left(\prod_s \prod_{i\neq j}\left(m_{s_i} - m_{s_j}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$m_{s_i}$は$M\Phi^{(\mathrm{s,t})}$の固有値

$$Z_{1-\mathrm{loop}} = \Delta \frac{\left(\mathrm{det}R_{bf}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\mathrm{det}R_{fb}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

# Saddle point approximation (3)

$M_s = diag\left(\underbrace{m_{s_i}}\right)_{i=1,2,\cdots n_s}$ の対角化から生じるVandermonde 行列式 $\Delta = \left(\prod_s \prod_{i \neq j} \left(m_{s_i} - m_{s_j}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$m_{s_i}$ は $M\Phi^{(\mathrm{s,t})}$ の固有値

$$Z_{1-\mathrm{loop}} = \Delta \frac{\left(\det R_{bf}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\det R_{fb}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

規格化因子に含めるので今は無視

$$= (-1)^{\sum_s n_s^2} \left(\frac{64}{3\Omega}\right)^{\sum_s n_s} \sum_{s=1}^{q} \left(\frac{1}{N_s} \prod_{J=1}^{N_s - 1} \frac{(2+3J)^3}{(1+3J)^3}\right)^{n_s}$$

$$\prod_{s,t=1}^{q} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n_s, n_t} \prod_{J=|j_s - j_t|}^{j_s + j_t} \left[\frac{\left[\left(\frac{\Omega}{8}\right)^2 (2+3J)^2 + \left(m_{s_i} - m_{t_j}\right)^2\right]^3 \left[\left(\frac{\Omega}{8}\right)^2 (3J)^2 + \left(m_{s_i} - m_{t_j}\right)^2\right]^3}{\left[\left(\frac{\Omega}{8}\right)^2 (1+3J)^2 + \left(m_{s_i} - m_{t_j}\right)^2\right]^3 \left[\left(\frac{\Omega}{8}\right)^2 (3+3J)^2 + \left(m_{s_i} - m_{t_j}\right)^2\right]^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

# Result of localization

$$S[\hat{Z}] = -\frac{9\Omega^4}{2^{13}}\mathrm{Tr}L_i^2 + \frac{3\Omega^2}{2^7}\mathrm{Tr}M^2 \;= -\frac{9\Omega^4}{2^{15}}\sum_s n_s N_s(N_s^2-1) + \frac{3\Omega^4}{2^7}\sum_s\sum_{i=1}^{n_s} N_s m_{s_i}^2$$

$$\because\; m \to \Omega m(rescaling)$$

# Result of localization

$$S[\hat{Z}] = -\frac{9\Omega^4}{2^{13}}\mathrm{Tr}L_i^2 + \frac{3\Omega^2}{2^7}\mathrm{Tr}M^2 = -\frac{9\Omega^4}{2^{15}}\sum_s n_s N_s(N_s^2-1) + \frac{3\Omega^4}{2^7}\sum_s\sum_{i=1}^{n_s} N_s m_{s_i}^2$$

$$\because m \to \Omega m (rescaling)$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= \sum_R Z_R \\ &= \sum_R C_R\, \mathrm{e}^{\frac{9\Omega^4}{2^{15}}\sum_s n_s N_s (N_s^2-1)} \int \prod_s \prod_{i=1}^{n_s} dm_{s_i} Z_{1-\mathrm{loop}}\, e^{-\frac{3\Omega^4}{2^7}\sum_s \sum_{i=1}^{n_s} N_s m_{s_i}^2}\end{aligned}}$$

$$C_R\text{: 規格化因子} = \frac{(2\pi)^{5N^2+\frac{N}{2}}}{\prod_{k=1}^{N-1}k!\prod_s n_s!}\left(\frac{32}{3\pi}\right)^{\sum_s n_s}\sum_{s=1}^{q}\left(\frac{1}{N_s}\prod_{J=1}^{N_s-1}\frac{(2+3J)^3}{(1+3J)^3}\right)^{n_s}$$

$$Z_{1-loop} = \prod_{s,t=1}^{q}\prod_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n_s,n_t}\prod_{J=|j_s-j_t|}^{j_s+j_t}\left[\frac{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2(2+3J)^2+\left(m_{s_i}-m_{t_j}\right)^2\right]^3\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2(3J)^2+\left(m_{s_i}-m_{t_j}\right)^2\right]^3}{\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2(1+3J)^2+\left(m_{s_i}-m_{t_j}\right)^2\right]^3\left[\left(\frac{1}{8}\right)^2(3+3J)^2+\left(m_{s_i}-m_{t_j}\right)^2\right]^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

# Summary and the future work

・Braneの量子数がSU(2)既約表現の次元および縮退度と対応
・超重力解が行列模型の古典的な解(fuzzy sphere) と一対一対応

局所化して新たに求めた分配関数$\mathrm{Z_R}$を用いて

・Matrix modelと重力の記述の間の双対性
・重力解Vが行列模型から再現できるか

について今後見ていきたい