

A review of “Non-associative Algebras of Cubic Matrices and their Gauge Theories” 中間発表

Ralph Blumenhagen, Antonia Paraskevopoulou, Thomas Raml
JHEP 09 (2025) 003, arXiv:2504.02942v1

筑波大学 素粒子理論研究室

博士前期課程2年

秋野 僚介

中間発表 令和7年10月10日

Abstract

この論文では、

- 通常の行列とCubic行列を同時に含む、非結合的代数を提唱
→2項 L_∞ 代数とみなせる。
- 得られた代数によるYang-Mills理論の一般化について議論する。
代数の応用例：トポロジカルBF理論, 変形IKKT模型

目次

1. Motivation and Introduction
2. Cubic行列と L_∞ 代数
3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用
4. Conclusion

目次

1. Motivation and Introduction

2. Cubic行列と L_∞ 代数

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用

4. Conclusion

1. Motivation and Introduction

M理論

- 無矛盾な量子重力理論の候補の一つ
10次元Type IIA超弦理論の強結合極限。
- 謎が多い理論。定式化は未完成。
- 現在知られる最も有望な定式化：BFSS行列模型

1. Motivation and Introduction

BFSS行列模型

- この理論にはM2-branesが含まれることが知られている。
- しかし、理論はM5-branesを含まないように見える。
(M5-brane currentはJacobi恒等式により消滅)



M5-branesを組み込むアイデア：Jacobi恒等式を破る

→3項括弧構造や高次構造

[BLG, Jurco-Samann-Schreiber]

- N 枚のM5-branesは $O(N^3)$ の自由度を持つことが知られる
→Cubic行列 a_{ijk}

[Awata-Minic-Yoneya, Kawamura, Ho-Hou-Matsuo]

1. Motivation and Introduction

この論文では、

- $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ 行列と、 $\mathcal{M} \times \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ cubic 行列の両方を含む代数を構築
→ 2項 L_∞ 代数構造 (L_2^{cub} 代数)。
- この代数構造がゲージ理論において整合的に実装できるか議論
→ 高次形式ゲージ場の導入が必要となる。
- 得られた理論の欠点を回避するための可能な修正について議論
- この代数の他の応用について概説する。

目次

1. Motivation and Introduction
2. Cubic行列と L_∞ 代数
3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用
4. Conclusion

2. Cubic行列と L_∞ 代数

- ベクトル空間 $V = V_B \oplus V_C$ を考える

(V_B は行列の空間、 V_C はcubic行列の空間)

$$\{M_{ij}\} \in V_B, \{a_{rij}\} \in V_C, (i, j = 1, \dots, \mathcal{N}, r = 1, \dots, \mathcal{M})$$

- V の一般の元を $X = M + a$ で表す。

- エルミート共役

$$\begin{aligned} (M^\dagger)_{ij} &:= M_{ji}^* \\ (a^\dagger)_{rij} &:= a_{rji}^* \end{aligned}$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

積の定義

- 行列 $\times$ 行列

$$(M \cdot N)_{ij} = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} M_{im} N_{mj}$$

- cubic行列 $\times$ cubic行列

$$(a \cdot b)_{ij} = \sum_{r=1}^{\mathcal{M}} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} a_{rim} b_{rmj}$$

- 行列 $\times$ cubic行列, cubic行列 $\times$ 行列

$$(M \cdot a)_{rij} = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} M_{im} a_{rmj}, \quad (a \cdot M)_{rij} = \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} a_{rim} M_{mj}$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

積の定義

- これらの積は、 $\mathbb{Z}_2$ graded

$$M \cdot M \rightarrow M, \quad a \cdot a \rightarrow M, \quad M \cdot a \rightarrow a, \quad a \cdot M \rightarrow a$$

$$M \in V_B : \text{even degree}$$

$$a \in V_C : \text{odd degree}$$

- 一般に3つのCubic行列の積は非結合的
$$(a \cdot b) \cdot c \neq a \cdot (b \cdot c)$$

- ただし、普通の行列を含む3項の積は結合的

Example:

$$(Ma)b - M(ab) = 0, \quad (MN)a - M(Na) = 0$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

交換子とJacobiatorの定義

- Commutator

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1$$

- Jacobiator

$$\text{Jac}(X_1, X_2, X_3) := [[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2]$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

トレースと内積の定義

トレース

- 普通の行列のトレースは、従来の通り定義
- Cubic行列のトレースは、ゼロと定義

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} M_{ii}, \quad \mathrm{tr}(a) = 0$$

- このトレースは巡回性が成り立つ：

$$\mathrm{tr}(Mab) = \mathrm{tr}(abM) = \mathrm{tr}(bMa)$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

トレースと内積の定義

内積

$$\langle M_1, M_2 \rangle = \text{tr}(M_1^\dagger M_2), \quad \langle a_1, a_2 \rangle = \text{tr}(a_1^\dagger a_2)$$

- これは $M \neq 0, a \neq 0$ に対して

$$\langle M, M \rangle = \sum_{i,j} |M_{ij}|^2 > 0, \quad \langle a, a \rangle = \sum_{r,i,j} |a_{rij}|^2 > 0$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

L_∞ 代数 : Lie代数の一般化

- 次数付きベクトル空間 $V = \bigoplus_k V_k$ (k は次数を表す)を考える。
- n 項積 l_n (交換子の一般化)を考える ($n \in \mathbb{N}$)

$$l_n: V^{\otimes n} \rightarrow V$$

ただし、多重線形、次数 $(n-2)$ 、次数付き反対称

$$l_n(\dots, X_1, X_2, \dots) = (-1)^{1+\deg(X_1)\deg(X_2)} l_n(\dots, X_2, X_1, \dots)$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

L_∞ 代数

- これら l_n が次の関係式を満たすとき、 l_n の組は L_∞ 代数を定義。

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_n(X_1, \dots, X_n) \\ &:= \sum_{i+j=n+1} (-1)^{i(j-1)} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \chi(\sigma; X) l_j(l_i(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \sigma(1) < \dots < \sigma(i), \quad \sigma(i+1) < \dots < \sigma(n) \\ & l_n(X_1, \dots, X_n) = \chi(\sigma; X) l_n(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

L_∞ 代数： Lie代数とのつながり

ベクトル空間 $V = V_0 (V_k = 0 (k \neq 0))$ を考える

→ このとき l_2 は Lie代数の構造を与える

$$l_2(X_a, X_b) = f_{ab}^c X_c$$

$J_3 = 0$ は Jacobi恒等式を意味

$$\begin{aligned} J_3(X_1, X_2, X_3) \\ = l_2(l_2(X_1, X_2), X_3) + l_2(l_2(X_2, X_3), X_1) + l_2(l_2(X_3, X_1), X_2) \end{aligned}$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

Cubic行列を含む2項 L_∞ 代数

考えるベクトル空間

$$\begin{aligned} V &= V_0 \oplus V_1 \\ V_k &= 0 \quad (k \neq 0, 1) \end{aligned}$$

- V_0, V_1 を次のように選ぶ：

$$V_0 = V_1 = V_B \oplus V_C$$

- 以降、 V の元を $X_i \in V_0, Y_i \in V_1$ で表す。

2. Cubic行列と L_∞ 代数

Cubic行列を含む2項 L_∞ 代数

l_n を定義

$$l_1(Y_i) = X_i(\text{恒等写像}), \quad l_1(X_i) = 0$$

$$l_2(X_1, X_2) := [X_1, X_2] \in V_0$$

$$l_2(X_1, Y_2) := [X_1, Y_2] \in V_1$$

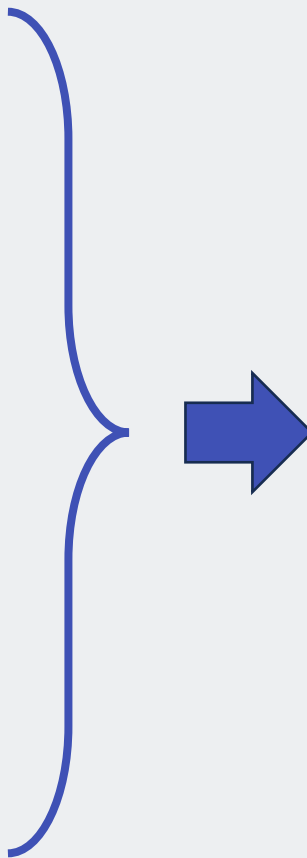
$$l_2(Y_1, X_2) := [Y_1, X_2] \in V_1$$

$$l_2(Y_1, Y_2) := 0$$

$$l_3(X_1, X_2, X_3) := -\text{Jac}(X_1, X_2, X_3) \in V_1$$

$$l_3(\text{others}) := 0$$

$$k \geq 4 \text{ に対して } l_k := 0$$


$$\mathcal{J}_n = 0$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

Cubic行列を含む2項 L_∞ 代数

→行列とcubic行列の代数は2項 L_∞ 代数に拡張できる。
(以降、この代数を L_2^{cub} 代数と呼ぶ。)

2. Cubic行列と L_∞ 代数

L_2^{cub} 代数の基礎恒等式

$$[X_1, X_2, X_3] := l_3(X_1, X_2, X_3) = -\text{Jac}(X_1, X_2, X_3)$$

$J_4 = 0$ は基礎恒等式を意味

$$\begin{aligned} & [[X_1, X_2, X_3], X_4] - [[X_2, X_3, X_4], X_1] + [[X_3, X_4, X_1], X_2] - [[X_4, X_1, X_2], X_3] \\ &= [[X_1, X_2], X_3, X_4] - [[X_2, X_3], X_4, X_1] + [[X_3, X_4], X_1, X_2] - [[X_4, X_1], X_2, X_3] \\ &\quad - [[X_1, X_3], X_2, X_4] - [[X_2, X_4], X_1, X_3] \end{aligned}$$

2. Cubic行列と L_∞ 代数

他のcubic行列モデルとの関係

Lie 3-代数(Filippov 3-代数) :

南部括弧の量子版で、多重線形3項括弧によって定義される
$$[\cdot, \cdot, \cdot]_F: V \otimes V \otimes V \rightarrow V$$

これは完全反対称かつ、基礎恒等式を満たす。

$$\begin{aligned} & [A_1, A_2, [A_3, A_4, A_5]_F]_F \\ &= [[A_1, A_2, A_3]_F, A_4, A_5]_F + [A_3, [A_1, A_2, A_4]_F, A_5]_F \\ &+ [A_3, A_4, [A_1, A_2, A_5]_F]_F \end{aligned}$$

- これは、cubic行列で実現できることが知られる^[1]。

2. Cubic行列と L_∞ 代数

他のcubic行列モデルとの関係

- この論文で定義した3項括弧

$$[X_1, X_2, X_3] := -\text{Jac}(X_1, X_2, X_3)$$

は、一般にFilippov 3-代数の基礎恒等式を満たさない。

- 既存のcubic行列を用いた代数との相違点：

cubic行列の積について中間ステップとして通常の行列を考える
→より体系的なアプローチが可能としている。

目次

1. Motivation and Introduction
2. Cubic行列と L_∞ 代数
3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用
4. Conclusion

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

Yang-Mills理論の一般化

L_2^{cub} 代数での(1-形式)ゲージ場 $\mathcal{A}_\mu \in \Omega^1(M) \otimes V_0$ を考える

(M : D-dimensional Minkowski space, V_0 : L_∞ 代数における次数0のベクトル空間)

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu + a_\mu$$

$$A_\mu \in \Omega^1(M) \otimes V_B$$

$$a_\mu \in \Omega^1(M) \otimes V_C$$

- ゲージ変換(パラメータ $\Lambda = \Lambda + \lambda \in \Omega^0(M) \otimes V_0$)

$$\delta_\Lambda \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \Lambda + i[\Lambda, \mathcal{A}_\mu] = \mathcal{D}_\mu \Lambda$$

$\Leftrightarrow$

$$\delta_\Lambda A_\mu = \partial_\mu \Lambda + i[\Lambda, A_\mu] + i[\lambda, a_\mu]$$

$$\delta_\Lambda a_\mu = \partial_\mu \lambda + i[\Lambda, a_\mu] + i[\lambda, A_\mu]$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

Yang-Mills理論の一般化

- 場の強さ $\mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \\ \delta_\Lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} &= i[\Lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] - l_1([\Lambda, \mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu])\end{aligned}$$

ゲージ共変ではない。非零Jacobiatorに由来

* 以降、 l_1 は次数に合わせ暗黙的に含まれるとして略

- $\mathcal{B}_{\mu\nu} \in \Omega^2(M) \otimes V_*$ を導入、ゲージ共変性を保つよう修正

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} &= \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{B}_{\mu\nu} \\ \delta_\Lambda \mathcal{B}_{\mu\nu} &= i[\Lambda, \mathcal{B}_{\mu\nu}] + [\Lambda, \mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]\end{aligned}$$

$$\rightarrow \delta_\Lambda \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = i[\Lambda, \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}]$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

Yang-Mills理論の一般化

- $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ は1-形式ゲージ対称性を持つ。

$E_\mu = \Xi_\mu + \xi_\mu \in \Omega^1(M) \otimes V_*$ によるゲージ変換

$$\delta_E \mathcal{B}_{\mu\nu} = 2\mathcal{D}_{[\mu} \Xi_{\nu]} , \quad \delta_E \mathcal{A}_\mu = -\Xi_\mu$$

に対し、 $\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ は不変。

$$\delta_E \hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = 0$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

Yang-Mills理論の一般化

作用

$$S = -\frac{1}{4} \int d^D x \operatorname{tr}(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu})$$

はゲージ変換 $\Lambda, \mathcal{E}_\mu$ の下でゲージ不変

- ただし、

- 1-形式ゲージ場 $\mathcal{A}_\mu \rightarrow$ ダイナミカル

- $\mathcal{A}_\mu$ に関する運動方程式 $\mathcal{D}_\nu \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 0$

- 2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu} \rightarrow$ 運動項なし

- $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ に関する運動方程式 $\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = 0$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $B_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張

2-形式ゲージ場 $B_{\mu\nu}$ をダイナミカルに拡張できるか？

- 3つの方針
 1. Gauge rectifire
 2. 背景3-形式
 3. L_3^{cub} への拡張

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ の場の強さ

Bianchi恒等式が示せる

$$3\mathcal{D}_{[\mu}\hat{\mathcal{F}}_{\nu\rho]} = \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$$

$$\mathcal{H}_{\mu\nu\rho} = 3\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{B}_{\nu\rho]} - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_\rho]$$

- $\mathcal{H}_{\mu\nu\rho}$ は、 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ の一般化した場の強さ (3-形式)

- ゲージ変換は

$$\delta_\Lambda \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} = i[\Lambda, \mathcal{H}_{\mu\nu\rho}] + 3[\Lambda, \hat{\mathcal{F}}_{[\mu\nu}, \mathcal{A}_{\rho]}]$$

$$\delta_\Xi \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} = 3[\Xi_{[\mu}, \hat{\mathcal{F}}_{\nu\rho]}]$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $B_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張 : 1. Gauge rectifier

再定義で異常なゲージ変換挙動を修正するアイデア :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} &= \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} + \Delta(\mathcal{F}, \mathcal{A}) \\ \delta_\Lambda \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} &= i[\Lambda, \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho}], \quad \delta_\Xi \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} = 0\end{aligned}$$

となる $\Delta(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ を考える

→作用

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} \text{tr}(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) - \frac{1}{6} \text{tr}(\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} \hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu\rho}) \right)$$

はゲージ変換 Λ, Ξ の下でゲージ不変

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張：1. Gauge rectifier

• $\Delta(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ の具体的な形として、現在唯一見つかったものは

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} = \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} - 3\mathcal{D}_{[\mu}\mathcal{B}_{\nu\rho]} = 0$$

これはBianchi恒等式より自明に零

→運動方程式は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\nu \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= 0 \\ \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= 0\end{aligned}$$

となり、 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ が非ダイナミカルな理論に戻る。

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張：2. 背景3-形式

新たな3-形式場 $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ を導入し、異常なゲージ変換挙動を修正

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} &= \mathcal{H}_{\mu\nu\rho} + \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} \\ \delta_\Lambda \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} &= i[\Lambda, \mathcal{C}_{\mu\nu\rho}] - 3[\Lambda, \hat{\mathcal{F}}_{[\mu\nu}, \mathcal{A}_{\rho]}] \\ \delta_E \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} &= -3[\mathcal{E}_{[\mu}, \hat{\mathcal{F}}_{\nu\rho]}]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} &= i[\Lambda, \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho}] \\ \delta_E \hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} &= 0\end{aligned}$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張：2. 背景3-形式

- 作用

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{4} \text{tr}(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) - \frac{1}{6} \text{tr}(\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} \hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu\rho}) \right)$$

はゲージ変換 Λ, Ξ の下でゲージ不変

- 新たな問題点： $\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ の運動項がない

$\mathcal{C}_{\mu\nu\rho}$ の2-形式ゲージ変換？

$$\delta_{\Theta} \mathcal{C}_{\mu\nu\rho} = 3\mathcal{D}_{[\mu} \Theta_{\nu\rho]}, \quad \delta_{\Theta} \mathcal{B}_{\mu\nu} = -\Theta_{\mu\nu}, \quad \delta_{\Theta} \mathcal{A}_{\mu} = 0$$

(このとき $\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho}$ はゲージ不変)

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $B_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張：2. 背景3-形式

このとき、2-形式場の強さ $\hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}$ は

$$\delta_{\Theta} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu} = -\Theta_{\mu\nu}$$

→作用はゲージ変換 Θ の下でゲージ不変ではない

- 一般に、（より多くの非零ベクトル空間を持つ）より一般的な L_{∞} 代数を扱うと、高次形式のゲージ場とゲージ不変場の強さを構築し続けることが可能

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

2-形式ゲージ場 $B_{\mu\nu}$ のダイナミカル拡張：3. L_3^{cub} への拡張

Cubic行列 $\times$ cubic行列 $\rightarrow$ cubic行列となる積を定義

$\rightarrow L_3^{\text{cub}}$ 代数(cubic行列を含んだ3項 L_∞ 代数)を構築できる

L_3^{cub} 代数を考える

- メリット：ゲージ場を配置するベクトル空間の選択肢が増える

- デメリット：この構造と両立する内積の構築が難しい

$\rightarrow$ 作用は今のところ不明

ただし、運動方程式のレベルで作業する際には有効的な可能性も

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

フェルミオンの導入

L_2^{cub} のボソンゲージ理論→超対称拡張は可能か？

($D = 10$ に限定)

- ゲージ場 A_μ, a_μ にゲージノスーパーパートナーを導入
(L_2^{cub} の随伴表現において変換されるMajorana-Weylスピノルのペア)

$$\begin{aligned}\Theta &\in V_B, \theta \in V_C \\ \Theta &= \Theta + \theta\end{aligned}$$

- ゲージ変換

$$\delta_\Lambda \Theta = i[\Lambda, \Theta]$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

フェルミオンの導入

- 共変微分 $\hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta = \partial_\mu \Theta - i[\mathcal{A}_\mu, \Theta] + \Psi_\mu$
ここで、新たなスピン背景場 $\Psi = \Psi + \psi$ を導入した

$$\delta_\Lambda(\hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta) = i[\Lambda, \partial_\mu \Theta - i[\mathcal{A}_\mu, \Theta]] - [\Lambda, \mathcal{A}_\mu, \Theta] + \delta_\Lambda \Psi_\mu$$

→スピン背景場 Ψ の変換が

$$\begin{aligned}\delta_\Lambda \Psi_\mu &= i[\Lambda, \Psi_\mu] + [\Lambda, \mathcal{A}_\mu, \Theta] \\ \delta_\Xi \Psi_\mu &= -i[\Xi_\mu, \Theta]\end{aligned}$$

ならば、 $\hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta$ は共変。

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

フェルミオンの導入

作用

$$S = \int d^{10}x \left(-\frac{1}{4} \text{tr}(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\Theta} \Gamma^\mu \hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta) \right)$$

はゲージ不変

- フェルミオンの運動方程式は

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu \hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta &= 0 \\ \Theta &= 0 \end{aligned}$$

→ $\Psi_\mu = 0$ を意味し、運動方程式は自明なものになる

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

フェルミオンの導入

作用に Ψ_μ の運動項を追加する拡張

$$S = \int d^{10}x \left(-\frac{1}{4} \text{tr}(\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \hat{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) - \frac{1}{6} \text{tr}(\hat{\mathcal{H}}_{\mu\nu\rho} \hat{\mathcal{H}}^{\mu\nu\rho}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\Theta} \Gamma^\mu \hat{\mathcal{D}}_\mu \Theta) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\Psi}_\mu \Gamma^{\mu\nu\rho} \hat{\mathcal{D}}_\nu \Psi_\rho) \right)$$

- ただし、 Ψ_μ はゲージ変換 Λ に対し共変ではなかった
→ 運動項は共変ではない
(ボソンの理論における $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ の運動項と同様の問題)

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論

ここまでのまとめ

- L_2^{cub} 代数を用いたYang-Mills理論の一般化を行った。
→2-形式ゲージ場 $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ の導入が必要
- $\mathcal{B}_{\mu\nu}$ の運動項の追加には困難が生じた
- フェルミオンの追加でも同様の問題

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用

L_2^{cub} 代数の応用について、2つの模型をかんたんに取り上げる。

1. トポロジカルBF理論

2. 高次元理論の0次元への次元還元(変形IKKT行列模型)

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用

1. トポロジカルBF理論

4次元トポロジカルBF理論の L_2^{cub} 一般化が実在？

作用

$$\bullet S_{\text{BF}} \sim \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left(\mathcal{B}_{\mu\nu} \left(\hat{\mathcal{F}}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} \mathcal{B}_{\rho\sigma} \right) - \frac{1}{6} \mathcal{A}_\mu [\mathcal{A}_\nu, \mathcal{A}_\rho, \mathcal{A}_\sigma] \right)$$

これは、 $\text{tr}(a[b, c, d]) = -\text{tr}(b[c, d, a])$ と基礎恒等式より
ゲージ変換 $\Lambda, \mathcal{E}$ の下でゲージ不変

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用

2. 高次元理論の0次元への次元還元(変形IKKT行列模型)

ゲージ変換が

$$\delta_\Lambda x^i = i[\Lambda, x^i], \quad \delta_E x^i = -E^i$$

であるような、次元還元された(行列/cubic行列値を持つ) x^i を考える

- ゲージ不変場の強さ

$$\hat{F}^{ij} = -i[x^i, x^j] + y^{ij}$$
$$\delta_\Lambda y^{ij} = i[\Lambda, y^{ij}] + [\Lambda, x^i, x^j], \quad \delta_E y^{ij} = -2i[E^{[i}, x^{j]}]$$

3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用

2. 高次元理論の0次元への次元還元(変形IKKT行列模型)

- x^i のゲージ共変性から、ゲージ不変な質量項を追加できる。

$$S_{\text{IKKT}} = -\frac{1}{4} \text{tr} \left((i[x^i, x^j] - y^{ij})(i[x_i, x_j] - y_{ij}) \right) + m_{ij} \text{tr}(x^i x^j)$$

- 質量項は x^i の運動方程式を変化させるが、 y^{ij} の運動方程式は変えない

$$x^i \text{ の運動方程式} \quad -i[x^j, i[x_i, x_j] - y_{ij}] + 2m_{ij}x^j = 0$$

$$y^{ij} \text{ の運動方程式} \quad i[x^i, x^j] - y^{ij} = 0$$

目次

1. Motivation and Introduction
2. Cubic行列と L_∞ 代数
3. L_2^{cub} 代数を用いたゲージ理論と応用
4. Conclusion

4. Conclusion

- 通常の行列とcubic行列を含む非結合的代数を提唱し、これが2項 L_∞ 代数となることを示した。
- L_2^{cub} 代数を用いたYang-Mills理論の一般化を行った。
得られた結果は、Chern-Simons理論と似た形の運動方程式など、非標準的な特徴がみられた。
- ダイナミカルな2-形式ゲージ場やフェルミオン物質の追加においては、困難に直面した。

展望

- L_∞ 代数の内積には巡回性という性質を考えることができるが、この論文の定義における内積はこれを満たすものではない
→巡回内積を持つcubic行列 L_∞ 代数と、その代数を用いた模型
- L_∞ 代数はBV形式論(BRST形式の一般化)と結び付けられる
→BV形式の観点から、問題の考察