# Higher spins on AdS3 from the worldsheet

Ferreira, Gaberdiel and Jotter JHEP07(2017)131

2023/11/17 Journal Club N. Ishibashi

# AdS/CFT correspondence

Type IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ $\longleftrightarrow$ 4D SU($N$) super Yang-Mills

$l_s, R, g_s$ $\qquad$ $g_{\mathrm{YM}}, N$

$$\begin{aligned} g_s &\sim g_{\mathrm{YM}}^2 \\ l_s &\sim \frac{R}{(g_{\mathrm{YM}}^2 N)^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

- 通常、$g_{\mathrm{YM}}^2 N \gg 1$ の場合を考える
- $g_{\mathrm{YM}}^2 N \to 0$ の場合を考えよう

$$l_s \to \infty$$

# Tensionless limit

- String theory

$$S = \frac{1}{l_s^2}\int d^2 z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \cdots$$

  - $m^2 \sim \frac{1}{l_s^2}$ の質量を持った無限個のスピンの大きい粒子を含む
- Tensionless limit $l_s \to \infty$
  - 理論は質量0のスピンの大きい粒子を無限個含む
  - これらは higher spin gauge 場に対応する
- この理論は AdS/CFT では free CFT に対応しているはず
  - Free field theoryは無限個の保存カレントを持つのでconsistent
- $S = 0$ となるので解析できない

# この論文

| Type IIB superstring theory on $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times T^4$ | $\longleftrightarrow$ | 2D CFT $(T^4)^N/S_N$ |
| --- | --- | --- |

- この場合は、tensionless limit が解析できる
  - Worldsheet theoryが厳密に解け、無限個のhigher spin gauge場があることが示せる
- その後の発展
  - CFTと spectrum が一致することが示せる
  - CFTとstringの相関関数が一致する機構がわかる
  - $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ の場合のtensionless極限のworldsheet theoryが提案される（Gaberdiel-Gopakumar）
    - Spectrumが一致する

# Outline

1. Superstring theory on $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times T^4$
2. Hybrid formalism
3. $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

# 1． Superstring theory on $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times T^4$

- worldsheet theoryは厳密に解ける（NS-NS flux）

$\mathrm{AdS}_3 \sim \mathrm{SL}(2, R)$
$S^3 \sim \mathrm{SU}(2)$

$$S = (k+2) S_{\mathrm{WZW}}^{\mathrm{SL}(2)} + (k-2) S_{\mathrm{WZW}}^{\mathrm{SU}(2)} + S^{T^4} + \text{fermions, ghosts}$$

$$S_{\mathrm{WZW}}^{G} = \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2 z \mathrm{Tr}\left[g^{-1}\partial g g^{-1}\bar{\partial} g\right] - \frac{i}{24\pi}\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Tr}\left[g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg\right]$$

$g \in G$

- 主張： $k=1$ が tensionless limit に対応する
  - Higher spin gauge 場を無限個含むことを示す
    - $k=1$だと $k-2=-1$ でやばい
    - 論文では $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3 \times S^3 \times S^1$ を考えている

$$g_s = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_5}}$$

$$\frac{R^2}{l_s^2} = Q_5$$

# string理論の状態

$$S = (k+2) S^{\mathrm{SL}(2)}_{\mathrm{WZW}} + (k-2) S^{\mathrm{SU}(2)}_{\mathrm{WZW}} + S^{T^4} + \text{fermions, ghosts}$$

$$S^{\mathrm{SL}(2)}_{\mathrm{WZW}} = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2z \mathrm{Tr}\left[g^{-1}\partial g g^{-1}\bar{\partial} g\right] - \frac{i}{24\pi}\int_{\mathcal{B}} \mathrm{Tr}\left[g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg\right]$$

$$J^a(z) = \sum_n J^a_n z^{-n-1} = (k+2)\mathrm{Tr}\left[T^a \partial g g^{-1}\right] + \psi T^a \psi$$

$$\begin{aligned}
[J^3_m, J^\pm_n] &= \pm J^\pm_{m+n} \\
[J^+_m, J^-_n] &= -2J_{m+n} + km\delta_{m+n,0} \\
[J^3_m, J^3_n] &= -\frac{k}{2} m\delta_{m+n,0}
\end{aligned}$$

- 状態空間はこの代数の表現になっている（ $\bar{J}^a_n$ もある）

# 表現

- Spectrally unflowed rep.

$$\mathrm{Span}\left\{J^{a_1}_{-n_1}\cdots J^{a_l}_{-n_l}|j,m\rangle\right\}$$

- $J^a_n|j,m\rangle = 0\ (n>0)$
- $\{|j,m\rangle\}$ yields a rep. of the SL(2) algebra $J^\pm_0, J^3_0$

$$\begin{aligned} J^3_0|j,m\rangle &= m|j,m\rangle \\ \mathbf{J}^2_0|j,m\rangle &= -j(j-1)|j,m\rangle \\ \mathbf{J}^2_0 &= \frac{1}{2}\left(J^+_0J^-_0 + J^-_0J^+_0\right) - \left(J^3_0\right)^2 \end{aligned}$$

- $\mathcal{D}^+_j = \mathrm{Span}\{|j,j\rangle, |j,j+1\rangle, |j,j+2\rangle, \cdots\}\ \left(\frac{1}{2}<j<\frac{k+1}{2}\right)$
- $\mathcal{C}^\lambda_j = \mathrm{Span}\{\cdots, |j,\lambda-1\rangle, |j,\lambda\rangle, |j,\lambda+1\rangle, \cdots\}\ (j\in i\mathbb{R})$

- Spectrally flowed rep.

$$|j,m\rangle^{(w)}\ (w\in\mathbb{Z})$$

$$J^\pm_n|j,m\rangle^{(w)} = 0\ (n>\pm w)$$
$$J^3_n|j,m\rangle = 0\ (n>0)$$
$$J^\pm_{\pm w}|j,m\rangle^{(w)} \propto |j,m\pm 1\rangle^{(w)}$$
$$J^3_0|j,m\rangle^{(w)} = (m+\frac{kw}{2})|j,m\rangle^{(w)}$$

# Higher spin gauge fields

- Stringの状態

$$|\ \rangle_{\mathrm{SL}(2)} \otimes \overline{|\ \rangle}_{\mathrm{SL}(2)} \otimes |\ \rangle_{\mathrm{rest}}$$

- Mass

$$J_0^-|\ \rangle_{\mathrm{SL}(2)} = \bar{J}_0^-\overline{|\ \rangle}_{\mathrm{SL}(2)} = 0$$
$$J_0^3|\ \rangle_{\mathrm{SL}(2)} = h|\ \rangle_{\mathrm{SL}(2)}$$
$$\bar{J}_0^3\overline{|\ \rangle}_{\mathrm{SL}(2)} = \bar{h}\overline{|\ \rangle}_{\mathrm{SL}(2)}$$

$$\begin{aligned} M^2 &= (E-|s|)(E+|s|-2) \\ & \quad E = h+\bar{h} \\ & \quad s = h-\bar{h} \end{aligned}$$

- Higher spin gauge fieldsに対応する状態

$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle^{(1)}_{\mathrm{SL}(2)} \otimes \overline{|\frac{1}{2},\bar{m}\rangle^{(1)}_{\mathrm{SL}(2)}} \otimes |\ \rangle_{\mathrm{rest}}$$

$$\begin{aligned} h &= 0 \\ \bar{h} &= \bar{m}+\frac{1}{2}+\bar{N} \end{aligned}$$

# 2． Hybrid formalism

- $k=1$ はやばかった（RNS formalism）

$$S=(k+2)S_{\mathrm{WZW}}^{\mathrm{SL}(2)}+(k-2)S_{\mathrm{WZW}}^{\mathrm{SU}(2)}+S^{T^4}+\text{fermions, ghosts}$$

- Hybrid formalism

$$S=kS_{\mathrm{WZW}}^{\mathfrak{psu}(1,1|2)}+S^{T^4}+\text{ghosts}$$

  - $k=1$ はOK
  - $k=1$ は free boson と free fermion を用いて記述できる

$$S_{\mathrm{WZW}}^{\mathfrak{psu}(1,1|2)}\sim\int dz^2\left(\lambda^\dagger\bar{\partial}\mu+\mu^\dagger\bar{\partial}\lambda+\sum_{a=1}^{2}\psi_a^\dagger\bar{\partial}\psi^a+\text{c.c.}\right)$$

  - この理論を用いてCFTとspectrum、相関関数が一致することが示せる

## 3. $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$

$$S_{\mathrm{WZW}}^{\mathfrak{psu}(1,1|2)} \sim \int dz^2 \left( \lambda^\dagger \bar\partial \mu + \mu^\dagger \bar\partial \lambda + \sum_{a=1}^{2} \psi_a^\dagger \bar\partial \psi^a + \mathrm{c.c.} \right)$$

- $\mathrm{AdS}_3 \times \mathrm{S}^3$ の対称性は $\mathfrak{psu}(1,1|2)$
- $(\lambda^\dagger, \mu^\dagger, \psi_a^\dagger), (\lambda, \mu, \psi^a)$ は $\mathfrak{psu}(1,1|2)$ の fundamental 表現

- $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ の対称性は $\mathfrak{psu}(2,2|4)$
- $\mathrm{AdS}_5 \times \mathrm{S}^5$ の tensionless 極限は（ $Y_I, Z^I$ : fundamental 表現）
  $S = \int d^2 z (Y_I \bar{D} Z^I + \mathrm{c.c.})$ で記述できるだろう
    - free 4D super Yang-Mills の spectrum を再現する（Gaberdiel-Gopakumar)