

Matrix model cosmology

S. Brahma, R. Brandenberger & S. Laliberte,

arXiv: 2107.11512, 2206.12468, 2210.07288

S. Brahma & S. Laliberte, arXiv: 2304.10509

Yuhma Asano

Journal club on Oct. 27, 2023

Introduction

行列模型は超弦理論の非摂動的定式化として提唱されている

BFSS matrix model … 1次元量子力学

IKKT matrix model … 0次元の“量子力学”

これらの行列模型を出発点として初期宇宙の宇宙論を導きたい

… IKKT modelに対して膨張宇宙に対する議論はなされてきた

[Kim, Nishimura, Tsuchiya '11, '12]

Brandenbergerらはstring gas cosmologyの文脈でこれを捉え、
初期宇宙を議論した。

String Gas Cosmology

弦特有の性質:

- 弦の振動
- 巻きつき
- T-duality

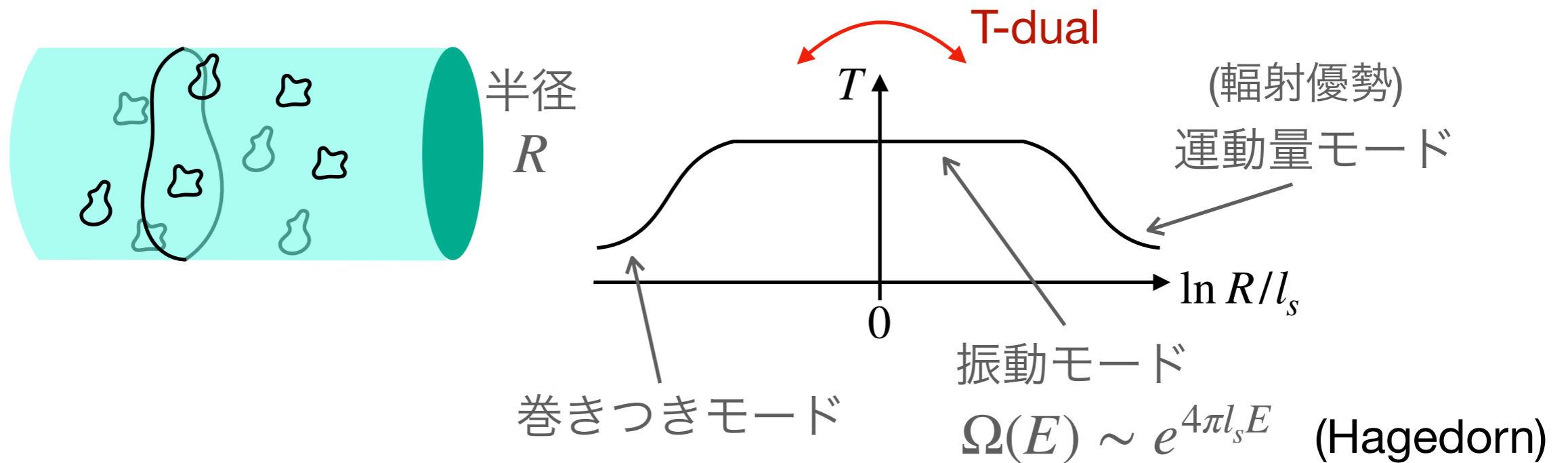
 \longrightarrow inflationを導入することなく宇宙論へアプローチ

[Brandenberger, Vafa '89]

- cosmological singularity problemの解消

通常の宇宙論では、宇宙の始まりに特異点があり温度は無限大になる

\longrightarrow 宇宙がstring gasでできているとすると

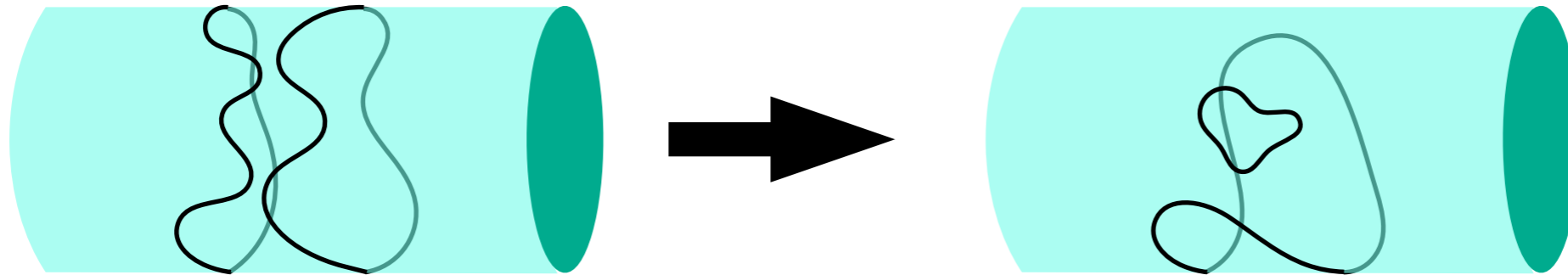


少なくとも温度のsingularityは解消される

String Gas Cosmology

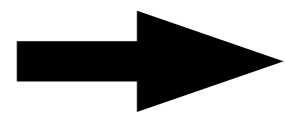
- 4次元時空の膨張

輻射優勢へ転移する時には弦の巻きつきが解けていく



… 解けるには弦が接触しないといけない

i.e. 世界面が交叉しないといけない



4(=2+2)次元より大きい時空では交叉する確率がほぼ0

4次元時空を示唆

[Sakellariadou '95]

Matrix model setup

String gas cosmologyは弦の性質しか使っておらず、
dynamicsまで議論できない \longrightarrow 行列模型

- BFSS model

高温でのBFSSを考える:

$$S_{\text{BFSS}} = \frac{1}{g^2} \int_0^\beta d\tau \text{tr} \left[\frac{1}{2} (D_\tau X^i)^2 - \frac{1}{4} [X^i, X^j]^2 - \theta^T D_\tau \theta + \theta^T \gamma_i [X^i, \theta] \right]$$

Matsubara modes $X^i = \beta^{-\frac{1}{4}} A^i + \sum_{n \neq 0} \beta^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_n^i e^{2\pi i n \tau / \beta}$

$$\longrightarrow S_{\text{BFSS}} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left[\underline{-\frac{1}{4} [A^\mu, A^\nu]^2} + \sum_n (2\pi n)^2 \tilde{X}_{-n}^i \tilde{X}_n^i - 2\pi i r \theta_{-r}^T \theta_r \right] + O(\beta^{3/4})$$

Bosonic IKKT model

Emergent space-time

- Interpretation for time and space

[Kim, Nishimura, Tsuchiya '11]

時間是对角化した A^0 の固有値

もし $\frac{1}{N} \langle \text{tr} A_0^2 \rangle \sim \kappa N$ で

固有値が一様分布なら

[cf. Ito, Nishimura, Tsuchiya '15]

$$t_{\max} \sim \sqrt{N}, \quad \Delta t \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} t_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{t_{m+1} \dots t_{m+n_i}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & t_N \end{pmatrix}$$

空間は A^i の submatrix

extent of space:

$$x_i(t_m)^2 = \left\langle \frac{1}{n_i} \sum_{I,J=1}^{n_i} A_{m+I,m+J}^i A_{m+J,m+I}^i \right\rangle$$

$$A^i = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & \boxed{n_i \times n_i} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

small

small

submatrixのサイズが*i*毎に異なることに注意

Emergent space-time

- Interpretation for metric

[Brahma, Brandenberger, Laliberte '22]

n_i : i th comoving spatial coordinate

$$ds^2 = - dt^2 + a(t, |n|) dn_i dn_i$$

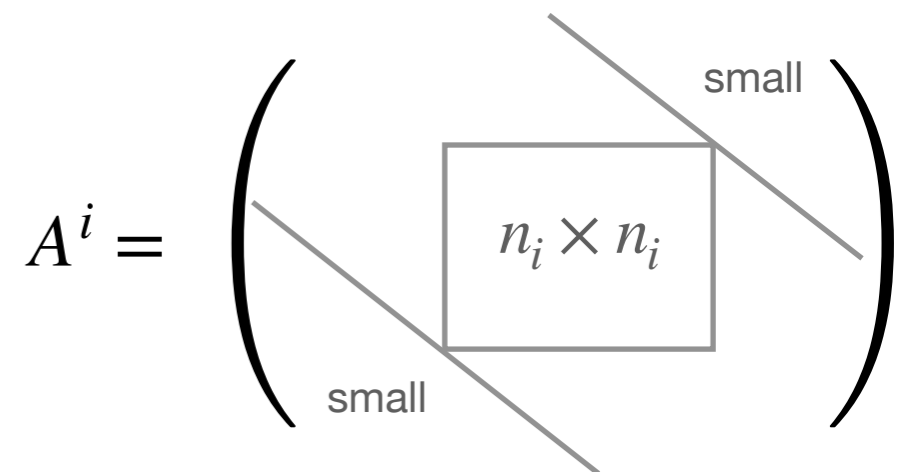
$$l_i^2(t_m, n_i) = \left\langle \sum_{I,J=1}^{n_i} A_{m+I,m+J}^i A_{m+J,m+I}^i \right\rangle$$

… i 方向に沿って0から n_i まで測った物理的長さの二乗と解釈

$$\left\langle A_{m+I,m+J}^i A_{m+J,m+I}^i \right\rangle \sim \begin{cases} \text{const.} & \text{for } n_i < n_c \sim g\sqrt{N} \\ 0 & \text{for } n_i > n_c \end{cases} \quad \text{であるならば}$$

$$\longrightarrow a(t_m, n_i)^{1/2} = \frac{\partial l_i}{\partial n_i} \sim \mathcal{A}(t_m)$$

\uparrow
 n_i -independent



Emergent space-time

- SSB and $SO(3)$ symmetric metric

BFSSでもIKKTと同じメカニズムで $SO(9)$ が自発的に破れる。

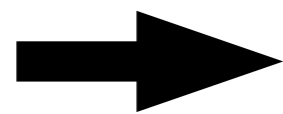
[Brahma, Brandenberger, Laliberte '22]

今の場合にもIKKTのように $SO(9)$ が $SO(3) \times SO(6)$ に破れたとする。

ただし実際にはSUSYがSSBを引き起こすのに重要であることに注意

$$a(t_m, n_i)^{1/2} = \frac{\partial l_i}{\partial n_i} \sim \mathcal{A}(t_m)$$

$$\therefore g_{ij} = \mathcal{A}(t)\delta_{ij} \quad \text{for } i = 1, 2, 3$$



flatness problemは自動的に解決

$\mathcal{A}(t)$ は行列模型の古典解の解析や数値計算で明らかになるはず

[cf. Kim, Nishimura, Tsuchiya '12;...]

注意: metricに関する議論では特に、 e^{-S} と e^{iS} をごっちゃにしている印象

Power spectrum

- Scale-invariance in power spectrum

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left(-(1 + 2\Phi)d\eta^2 + [(1 - 2\Phi)\delta_{ij} + h_{ij}]dx^i dx^j \right) \quad i = 1, 2, 3$$

曲率ゆらぎ

tensorゆらぎ

$$\langle \delta\Phi(x)^2 \rangle = \int d \ln k \, \underline{k^3 \delta\Phi(k)^2}$$

$$P(k) \sim \text{const.}$$

slow-roll param.

… inflationary scenarioで説明できている

$$P(k) \sim k^{-6\epsilon+2\eta} \sim k^0$$

BFSSの温度揺らぎを計算すると同様に $P(k) \sim \text{const.}$ が説明できる

Power spectrum

- BFSS Energy

高温では β についての摂動展開の近似がよい

$$\frac{E}{N^2} = \frac{3(D-2)}{4} \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) T - \alpha \chi_1 T^{-1/2} + O(T^{-2}) \quad \text{at high } T$$

$$\chi_1 = \frac{1}{N} \int [dA_\mu] \text{tr} A_i^2 \frac{e^{-S_{\text{bos IKKT}}(A_\mu)}}{Z_{\text{bos IKKT}}}$$

$$R^2 := \frac{1}{N\beta} \int_0^\beta d\tau \langle \text{tr} X_i^2 \rangle_{\text{BFSS}} = \chi_1 T^{1/2} + O(T^{-1})$$

[Kawahara, Nishimura, Takeuchi '07;

See also Y.A., Filev, Kovacic, O'Connor '16 for typo-less results]

$$X^i = \beta^{-\frac{1}{4}} A^i + \sum_{n \neq 0} \beta^{\frac{1}{2}} \tilde{X}_n^i e^{2\pi i n \tau / \beta}$$

Power spectrum

- Dimensionless power spectrum of scalar perturbations

$$P(k) = k^3 \delta\Phi(k)^2 = 16\pi^2 G^2 k^{-4} \delta\rho^2 \sim 16\pi^2 G^2 k^2 T^2 \frac{\partial E}{\partial T}$$

$$\delta\rho^2 \sim \frac{1}{(R^3)^2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \ln Z = \frac{T^2}{R^6} \frac{\partial E}{\partial T} \sim k^6 T^2 \frac{\partial E}{\partial T}$$

BFSSのEの式を代入すると

$$P(k) \sim 16\pi^2 G^2 N^2 \left(\frac{3(D-2)}{4} \left(1 - \frac{1}{N^2} \right) k^2 T^2 + \frac{\alpha}{2} k^2 \chi_1 T^{1/2} + O(T^{-1}) \right)$$

$$\sim k^2 R^2 T^{-1/2} l_s^{-4} \sim T^{-1/2} l_s^{-4}$$

$$\sim \star G l_s^{-4} + \star T^2 k^2 + \dots$$

[Brahma, Brandenberger, Laliberte '21]

UVで利く

IR ($k \sim R^{-1}$) でconstant! (scale invariance)

※ Hagedorn相のthermal string gasで得られたscale inv.と基本的に同じ

[Nayeri, Brandenberger, Vafa '05]

IKKT matrix model cosmology

IKKTはBFSSのTaylor's T-dualとして考えればよい。 [Taylor '96]

$$\beta_{\text{BFSS}} \rightarrow 1/\beta_{\text{IKKT}}$$

したがって計算はBFSSの場合とほぼ同じ。

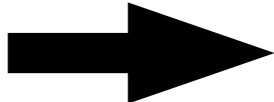
IKKT action:
$$S_{\text{IKKT}} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left[-\frac{1}{4} [X^\mu, X^\nu]^2 + \theta^T \gamma_\mu [X^\mu, \theta] \right]$$

“温度”は単位行列のshiftによる“compactification”で入れる:

$$U^{-1} X^0 U = X^0 + 2\pi\beta \mathbf{1} \quad U^{-1} X^i U = X^i \quad U^{-1} \psi U = -\psi$$

fuzzy cylinder: $[q, U] = U$

mode expansion:
$$X^i = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n^i \otimes U^n \quad X^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n^0 \otimes U^n + 2\pi\beta \mathbf{1} \otimes q$$


$$S_{\text{IKKT}} = \frac{1}{g^2} \text{tr} \left[\underline{-\frac{1}{4} [A^\mu, A^\nu]^2} + \sum_n (2\pi n)^2 \tilde{X}_{-n}^i \tilde{X}_n^i - 2\pi i r \theta_{-r}^T \theta_r \right] + O(T)$$

Bosonic IKKT model

IKKT matrix model cosmology

Power spectrum of scalar perturbations

$$P(k) \sim 16\pi^2 G^2 \left(-N^2(D-2)k^2 T^2 + \underline{2\tilde{\alpha}k^2 R^2 M^2 T^4} + \dots \right)$$

IR ($k \sim R^{-1}$) で constant (scale invariance)

[Brahma, Laliberte '23]

BFSSの場合と比べて、温度依存性や係数は異なる。

Summary

- String Gas Cosmologyのdynamicsとして行列モデルを適用した。従来のSGCの結果と同様、horizon and flatness problemは現れず、scale invarianceも示された。
- 行列モデルでは反転不変な時間が導かれ、過去と未来へ無限に伸びると考えられる: no big bang/crunch singularity。
さらにcosmological constant problemもないと考えられる。
- scalar-to-tensor ratioも求まるが、BFSSの結果はパラメータを $O(10^{-2})$ にする必要があるのに対して、IKKTの結果の方は $O(10^{-1})$ で済む。