

Bootstrap法による one matrix modelの数値解析


Phys. Rev. Lett. 125, 041601 (X. Han, S. A. Hartnoll, J. Kruthoff)

JHEP06(2022)030 (V. Kazakov, Z. Zheng)

筑波大学素粒子理論研究室 修士2年 貝瀬義法

指導教員 伊敷吾郎

- 行列モデルには非可換な行列が登場する為、行列が**複数**あると**解析的に**解くことが難しい…

 模型の理解には数値計算も重要

- Large N の計算は**計算量が膨大**に…

 ノートPCでも実行できる**Bootstrap法**に注目

 最もシンプルな**one matrix model**における振る舞いを見る

目次

1. Bootstrap法について
2. 1次元のone matrix modelへの適用
3. 0次元のone matrix modelへの適用
4. まとめと展望

1. Bootstrap法について

特徴

- シンプルな性質から条件（不等式）がいくつか出てくる
- 計算の規模（行列のサイズ）を大きくすると解の範囲が急速に縮小する
- 今回扱う one matrix model については…
 - ➡ Large N の場合の計算ができる
 - ➡ 一方で finite N の場合は苦手

1. Bootstrap法について

性質

適当な演算子 $O = \sum_{i=0}^K c_i O_i$ と、期待値の性質

$$\langle O^\dagger O \rangle = \mathbf{c}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{c} \geq 0$$

が数値計算に制約 (\mathbf{M} は半正定値行列) を与える.

c_i : 任意の複素数

K : 行列 \mathbf{M} のサイズを決めるカットオフ

\mathbf{M} : 期待値を成分に持つ $(K + 1) \times (K + 1)$ の行列 ($\mathbf{M}_{ij} = \langle O_i^\dagger O_j \rangle$)

1. Bootstrap法について

- 試しにシンプルな調和振動子系に適用してみる.

$$\left(\begin{array}{l} H = p^2 + x^2 + gx^4 \\ \langle [H, O] \rangle = 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{ここで言う期待値とは,} \\ \text{エネルギー固有状態における期待値} \end{array}$$

例として $O = xp, x^t p$ ($t \geq 0$) での期待値を考えると

$$O = xp, \quad \langle [H, O] \rangle = \langle [p^2 + x^2 + gx^4, xp] \rangle = -\langle 2p^2 \rangle + \langle 2x^2 \rangle + \langle 4gx^4 \rangle = 0$$

$$\text{ゆえに } \langle 2p^2 \rangle = \langle 2x^2 \rangle + \langle 4gx^4 \rangle, \quad E = 2\langle x^2 \rangle + 3g\langle x^4 \rangle$$

同じようにして $O = x^t p$ から次式を得る.

$$4t\langle x^{t-1}p^2 \rangle = 8g\langle x^{t+3} \rangle + 4\langle x^{t+1} \rangle - t(t-1)(t-2)\langle x^{t-3} \rangle$$


1. Bootstrap法について

また先の条件は $\langle HO \rangle = E\langle O \rangle$ と書けるため

$$O = x^{t-1}, \quad \langle x^{t-1} p^2 \rangle = E\langle x^{t-1} \rangle - \langle x^{t+1} \rangle - g\langle x^{t-3} \rangle$$

これら2つの式から p を消去すると

$$4tE\langle x^{t-1} \rangle + t(t-1)(t-2)\langle x^{t-3} \rangle - 4(t+1)\langle x^{t+1} \rangle - 4g(t+2)\langle x^{t+3} \rangle = 0$$

 $\langle x^0 \rangle = 1, \langle x^{\text{odd}} \rangle = 0, \langle x^{\text{even}} \rangle$ は $\langle x^2 \rangle$ と E で構成される

1. Bootstrap法について

以上から…

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \langle x^2 \rangle & \dots & \langle x^K \rangle \\ 0 & \langle x^2 \rangle & 0 & & \\ \langle x^2 \rangle & 0 & \langle x^4 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ \langle x^K \rangle & & \dots & & \langle x^{2K} \rangle \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{ij} = \langle x^{i+j} \rangle$$

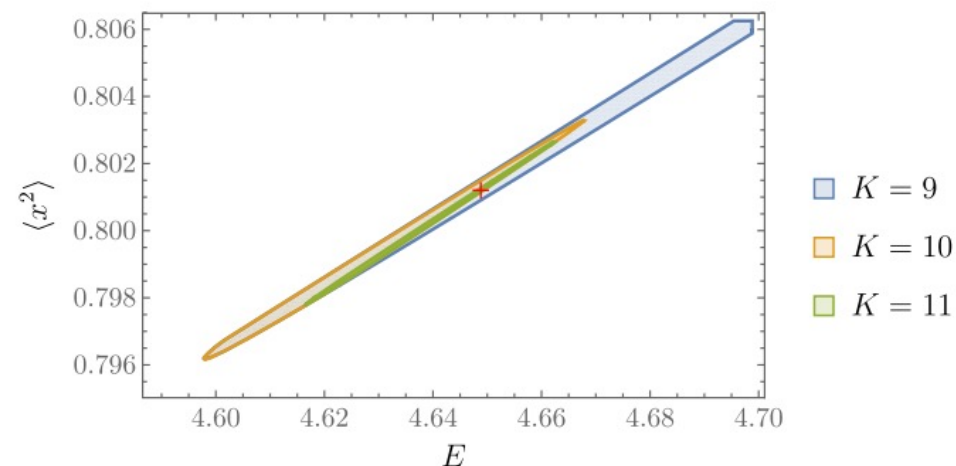
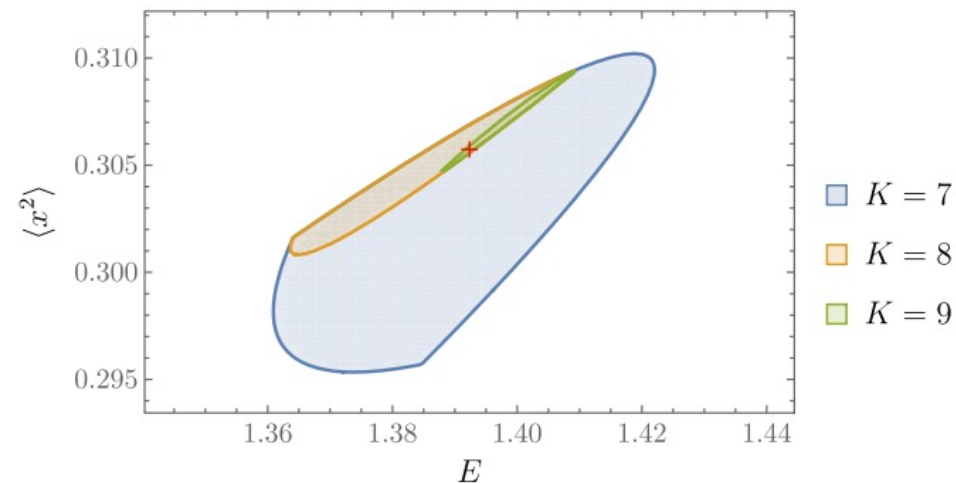
$K + 1$

$K + 1$

Bootstrap

➡ $\langle x^2 \rangle \geq 0$, \mathbf{M} は半正定値行列

➡ \mathbf{M} の固有値が全て0以上になる領域が解



$g = 1$ での結果

上：基底状態、下：第1励起状態

2. 1次元のone matrix modelへの適用

- 先の性質を行列を用いた形で書き直す

性質

適当な演算子 $O = \sum_{i=0}^K \alpha_i A^i$ と、期待値の性質

$$\langle \text{tr } O^\dagger O \rangle = \boldsymbol{\alpha}^\dagger \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha} \geq 0$$

が数値計算に制約 (\mathbf{M} は半正定値行列) を与える.

A : $N \times N$ エルミート行列

α_i : 任意の複素数

K : 行列 \mathbf{M} のサイズを決めるカットオフ

\mathbf{M} : 期待値を成分に持つ $(K + 1) \times (K + 1)$ の行列 ($\mathbf{M}_{ij} = \langle \text{tr } O_i^\dagger O_j \rangle$)

2. 1次元のone matrix modelへの適用

- 調和振動子系と同じ流れで1次元のone matrix modelに適用

$$\left(\begin{array}{l} H = \text{tr } P^2 + \text{tr } X^2 + \frac{g}{N} \text{tr } X^4, \quad \langle [H, O] \rangle = 0 \\ (P, X : N \times N \text{ エルミート行列}, [P_{ij}, X_{kl}] = -i\delta_{il}\delta_{jk}) \end{array} \right)$$

$$O = \text{tr } XP, \quad 2\langle \text{tr } P^2 \rangle = 2\langle \text{tr } X^2 \rangle + \frac{4g}{N} \langle \text{tr } X^4 \rangle \quad \langle \text{tr } X^2 P \rangle \text{ や } \langle \text{tr } X^3 \rangle \text{ など}$$

についても求める

対称性から条件式を出す

$$G = i[X, P] + N\mathbf{1} \quad \longleftarrow \quad \text{ゲージ群の生成子}$$

$$\langle \text{tr } GO \rangle = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{ゲージ不変性}$$

$$\longrightarrow \quad \langle [H, \text{tr } X^2] \rangle = 0, \langle \text{tr } G \rangle = 0 \text{ から} \quad \langle \text{tr } XP \rangle = -\langle \text{tr } PX \rangle = \frac{iN^2}{2}$$

2. 1次元のone matrix modelへの適用

- 例として、演算子の長さが $L = 2$ 以下の場合 (I, X, X^2, P) を考える

この時 O_i は I, X, X^2, P であり、 $\mathbf{M}_{ij} = \langle \text{tr } O_i^\dagger O_j \rangle$

\mathbf{M} が半正定値行列であるためには…



ブロック行列がこれらの不等式を満たしていれば良い

$$N \langle \text{tr } X^4 \rangle \geq \langle \text{tr } X^2 \rangle^2, \quad \underbrace{\langle \text{tr } X^2 \rangle \left(\langle \text{tr } X^2 \rangle + \frac{2g}{N} \langle \text{tr } X^4 \rangle \right)}_{\langle \text{tr } P^2 \rangle} \geq \frac{N^4}{4}$$

$$\mathbf{M} = \begin{array}{c|cccc} & I & X^2 & X & P \\ \hline I & \langle \text{tr } I \rangle & \langle \text{tr } X^2 \rangle & & \\ X^2 & \langle \text{tr } X^2 \rangle & \langle \text{tr } X^4 \rangle & & \\ X & & & \langle \text{tr } X^2 \rangle & \langle \text{tr } XP \rangle \\ P & & & \langle \text{tr } PX \rangle & \langle \text{tr } P^2 \rangle \end{array}$$

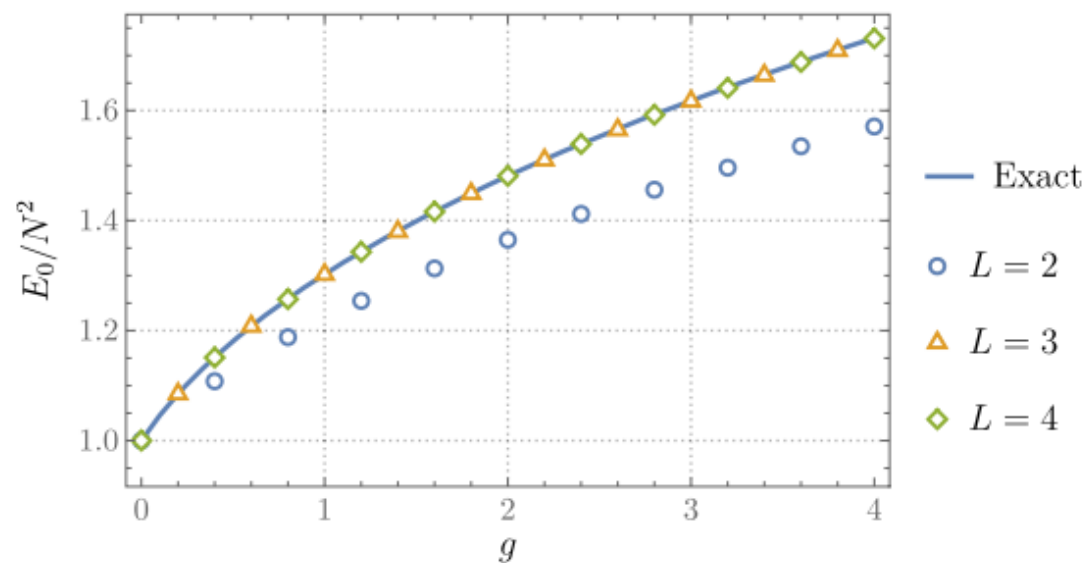
奇数次の期待値は0



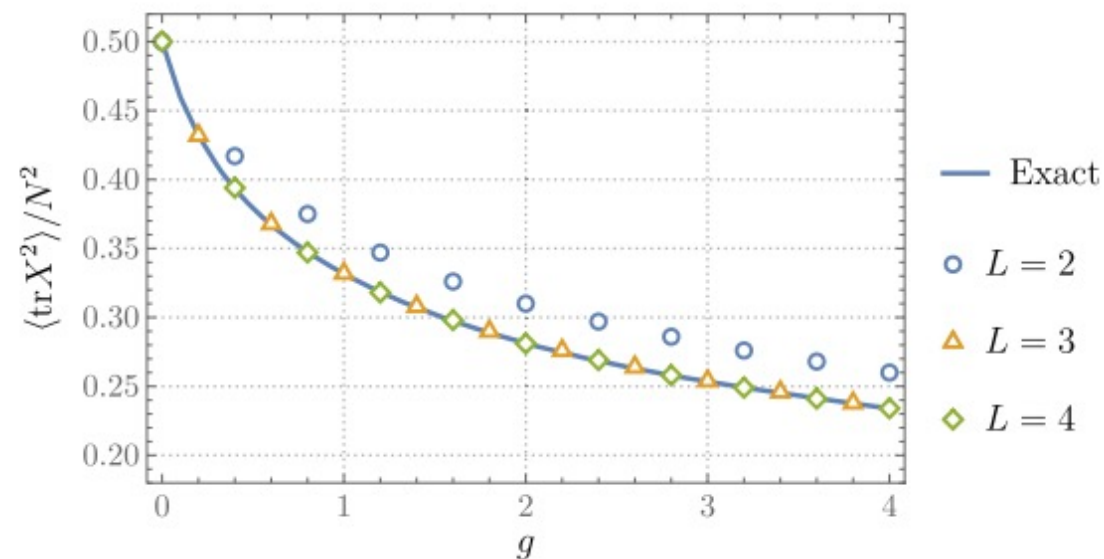
演算子の長さ L を大きくすると
条件（不等式）の数が増えていく

2. 1次元のone matrix modelへの適用

- 先の不等式を満たす範囲で描いたグラフ



E_0 は不等式を満たす中で最も低いエネルギー



E_0 における $\langle \text{tr} X^2 \rangle$ のグラフ

(引用：Xizhi Han, Sean A. Hartnoll, and Jorrit Kruthoff, Phys. Rev. Lett. 125, 041601 (2020))

3. 0次元のone matrix modelへの適用

- 少し工夫を加えたBootstrap法を適用してみる

loop方程式を導出し，レゾルベントの特徴を見る

$$\left(\begin{array}{l} \text{分配関数 : } Z_N = \int d^{N^2} A e^{-N \text{tr} V(A)} \quad \left(d^{N^2} A = \prod_{i,j} dA_{ij} \right) \\ \text{ポテンシャル : } V(A) = \sum_{j=2}^{d+1} \frac{g_j}{j} A^j \\ \text{期待値 : } W_k = \langle \text{Tr} A^k \rangle = \frac{1}{Z_N} \int d^{N^2} A \frac{\text{tr}}{N} A^k e^{-N \text{tr} V(A)} \quad \left(\text{Tr} = \frac{1}{N} \text{tr} \right) \end{array} \right)$$

Schwinger-Dyson方程式

$$\int d^{N^2} A \frac{\text{tr}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial A} A^k \right) e^{-N \text{tr} V(A)} = 0$$

導出



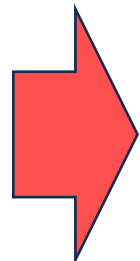
loop方程式

$$\sum_{j=1}^d g_{j+1} W_{k+j} = \sum_{l=0}^{k-1} W_l W_{k-l-1}$$

3. 0次元のone matrix modelへの適用

$$\left[\text{レゾルベント} : G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} W_k = \text{Tr} \frac{1}{z - A} \quad (z \in \mathbb{C}) \right]$$

レゾルベントを用いてloop方程式を書き直すと


$$G(z)^2 + P(z) = V'(z)G(z) \quad \left(P(z) = \text{Tr} \frac{V'(z) - V'(M)}{z - M} \right)$$
$$G(z) = \frac{1}{2} \left(V'(z) - \sqrt{V'(z)^2 - 4P(z)} \right)$$

この模型の場合, レゾルベント $G(z)$ は解析関数になる
(ここで $G(z)$ は無限遠で z^{-1} の様に振る舞う解を選んだ) .

3. 0次元のone matrix modelへの適用

ここで『Hamburgerのモーメント問題』と呼ばれる証明を用いる

『Hamburgerのモーメント問題』

実数の級数 $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して行列 $H_{ij} = m_{i+j}$ が半正定値となる時、
次の正の測度 $d\mu(x)$ が存在する

$$m_n = \int x^n d\mu(x).$$



$$W_n = \int_{[-R,R]} x^n d\mu(x)$$



$G(z)$ が無限遠で z^{-1} となるように、
 W_n に収束半径 $W_n \leq C_0 R$ を課す



$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} W_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1} \int_{[-R,R]} x^k d\mu(x) = \int_{[-R,R]} \frac{d\mu(x)}{z-x}$$

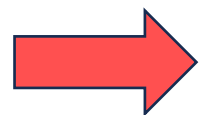
3. 0次元のone matrix modelへの適用

$$\text{固有値密度} : \rho(w) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^d \delta(w - w_j), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(w) dw = 1, \quad G(z) = \oint_{\Gamma} \frac{\rho(w)}{z - w} dw$$

$$W_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^n G(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \rho(x) dx \quad (\Gamma : G(z) \text{ の全ての分枝点を含む範囲})$$

以上から

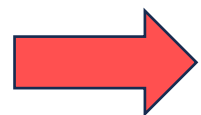
$$W_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} z^n G(z) dz = \int_{[-R,R]} x^n \rho(x) dx = \int_{[-R,R]} x^n d\mu(x)$$



固有値密度は非負なので $\rho(x) dx = d\mu(x) > 0$



$$G(z) = \int_{[-R,R]} \frac{\rho(x)}{z - x} dx, \quad |z| < R$$

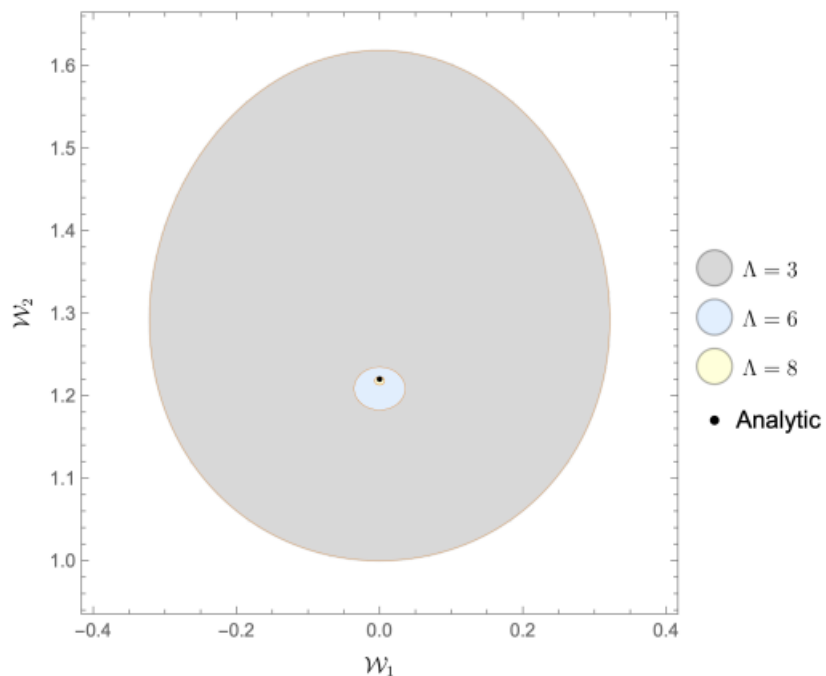


行列 \mathbf{M} の半正定値性は、解析関数 $G(z)$ の半正定値性を調べれば済む

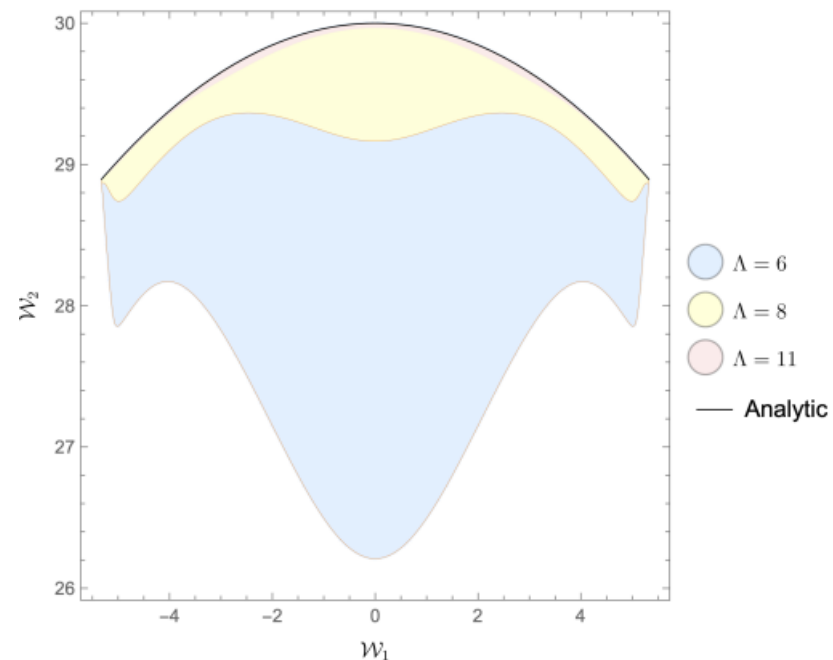
3. 0次元のone matrix modelへの適用

- $V(x) = \frac{1}{2}\mu x^2 + \frac{1}{4}gx^4$ におけるレゾルベントの半正定値性を調べてみる

➡ $\mu = \pm 1$, g は範囲を絞ってプロット



$g = 1$ のとき



$g = \frac{1}{12}$ のとき

(引用 : V. Kazakov, Z. Zheng, JHEP06(2022)030)

5. まとめと展望

- 簡単なポテンシャルで0次元と1次元のone matrix modelの数値計算を行い, Bootstrap法の特徴である解の収束性について見た.
- 特に0次元では解析的な工夫を加えることで, 計算が多少楽になる.
- 今回はone matrix modelを取り扱ったが, 0次元で見たアプローチの一部はtwo matrix modelなどの数値計算にもつながる可能性がある.

ご清聴ありがとうございました