Lightlike reduction of the M5 brane

Andreas Gustavsson

arXiv:2303.17846v1 [hep-th] 31 Mar 2023

イントロ

M5-ブレーンを記述する6次元の理論 → 5次元の理論

x^- 方向の dimension reduction

H_{MNP}

6次元テンソル場

→

$$H_{i+-} = F_{i+}$$
$$H_{ij-} = F_{ij}$$

ヤン・ミルズ場の強さ

$$H_{ij+} = G_{ij}$$

補助場

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST} H_{RST}$$

自己双対性

→

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} F_{kl}$$

自己双対性

$$G_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} G_{kl}$$

反自己双対性

$M, N, P = 0, \cdots, 5$ $\quad i, j = 1, \cdots, 4$

イントロ

M5-ブレーンを記述する6次元の理論

5次元の理論

x^- 方向の dimension reduction

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST} H_{RST}$$

自己双対性

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} F_{kl}$$

自己双対性

$$G_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} G_{kl}$$

反自己双対性

運動方程式

?

$$L_A = \frac{1}{2}G_{ij}F_{ij} + \frac{1}{2}F_{i+}F_{i+}$$

G_{ij} ：オフシェルでも反自己双対な補助場

[Lambert, Lisptein, Richmond (2019)]

問題点

通常のdimension reduction からは L_A が得られない。

フェルミオンの超対称変換が一致しない。

$$\delta\psi = \frac{1}{12}\Gamma^{MNP}\epsilon H_{MNP} + \cdots$$

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}\Gamma_{ij}\Gamma^{+}\epsilon G_{ij} + \frac{1}{4}\Gamma_{ij}\Gamma^{+}\epsilon F_{ij} \cdots$$

やりたいこと　dimension reduction を従来の手法から変更し L_A の導出を行う。

M5-ブレーンを記述する6次元の理論

5次元の理論

x^- 方向の dimension reduction

フェルミオンの超対称変換 を dimension reduction する代わりに
x^- 方向に沿った自己双対条件の dimension reduction を行う。

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST} H_{RST}$$

自己双対性

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} F_{kl}$$

自己双対性

$$G_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} G_{kl}$$

反自己双対性

運動方程式

やりたいこと

$$L_A = \frac{1}{2} G_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} F_{i+} F_{i+}$$

目次

1． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

2． ６次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

3．結論

１． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

計量

$$ds^2 = -dx^0 dx^0 + dx^5 dx^5 + dx^i dx^i$$
$$= 2dx^+ dx^- + dx^i dx^i$$

ライトライク座標

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^5 \pm x^0)$$

ヤン・ミルズ場の強さと6次元テンソル場との対応

$$F_{ij} = H_{ij-} \qquad G_{ij} = H_{ij+} \qquad F_{i+} = H_{i+-}$$

反対称テンソル

$$\varepsilon^{ijkl+-} = \varepsilon^{ijkl}$$

1． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

M5-ブレーンを記述する6次元の理論 → 5次元の理論

x^- 方向の dimension reduction
(x^- 方向の 微分がすべての場について０)

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST} H_{RST}$$

自己双対性

→

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} F_{kl} \qquad G_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl} G_{kl}$$

自己双対性　　反自己双対性

$$H_{ijk} = -\epsilon_{ijkl} F_{l+}$$

$$\partial_{[Q} H_{MNP]} = 0$$

ビアンキ恒等式

→

$$\partial_+ F_{ij} + 2\partial_{[i} F_{j+]} = 0 \qquad 3\partial_{[i} G_{jk]} - \partial_+ H_{ijk} = 0$$

1． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

M5-ブレーンを記述する6次元の理論 ⇒ 5次元の理論

x^- 方向の dimension reduction
(x^- 方向の 微分がすべての場について０)

$$G_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\,G_{kl} \qquad H_{ijk} = \epsilon_{ijkl}\,F_{l+}$$

がオフシェルでも成り立つと仮定する。

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST}\,H_{RST}$$

自己双対性

$$\partial_{[Q}H_{MNP]} = 0$$

ビアンキ恒等式

⇒

$$\partial_i G_{ij} = \partial_+ F_{j+} \qquad \partial_+ F_{i+} = 0 \qquad F_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}\,F_{kl}$$

⇑ 運動方程式

$$L_A = \frac{k}{2}G_{ij}F_{ij} + \frac{k}{2}F_{i+}F_{i+}$$

１． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

5次元の理論

ヤン・ミルズ場についてのラグランジアン

$$L_A = \frac{k}{2} G_{ij} F_{ij} + \frac{k}{2} F_{i+} F_{i+}$$

ボソンϕ^A とフェルミオンψ についてのラグランジアン

$$L_m = -\frac{1}{2}(D_i \phi^A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_i D_i \psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_- D_+ \psi + \frac{e}{2}\bar{\psi}\Gamma_- \Gamma^A [\psi, \phi^A]$$

超対称変換

共変微分 $D_M \Phi = \partial_M \Phi - ie[A_M, \Phi]$

11次元マヨラナ条件 $\bar{\psi} = \psi^T C$

6 次元ワイル射影 $\Gamma\psi = \psi$ $\Gamma\epsilon = -\epsilon$

$\Gamma = \Gamma^{012345}$

$$\delta\phi^A = i\bar{\epsilon}\Gamma^A \psi$$

$$\delta A_i = i\bar{\epsilon}\Gamma_{i-} \psi$$

$$\delta A_+ = i\bar{\epsilon}\Gamma_{+-} \psi$$

$$\delta\psi = \frac{a}{4}\Gamma_{ij}\Gamma_- \epsilon G_{ij} + \frac{b}{4}\Gamma_{ij}\Gamma_+ \epsilon F_{ij} - c\Gamma_i \Gamma_{+-} \epsilon F_{i+} + \Gamma_i \Gamma^A \epsilon D_i \phi^A + \Gamma_- \Gamma^A \epsilon D_+ \phi^A$$

$$\delta G_{ij} = \frac{if}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_k \Gamma_{ij+} D_k \psi + \frac{if}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_- \Gamma_{ij+} D_+ \psi + \frac{e}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_- \Gamma_{ij+} \Gamma^A [\psi, \phi^A]$$

1． $\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンを dimension reduction

5次元の理論

ラグランジアン

$$L = L_A + L_m = \frac{1}{2}(G_{ij}F_{ij} + F_{i+}F_{i+}) - \frac{1}{2}(D_i\phi^A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_i D_i\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_- D_+\psi + \frac{e}{2}\bar{\psi}\Gamma_-\Gamma^A[\psi, \phi^A]$$

ラグランジアンは、次の超対称変換に対して不変　　$\delta L = 0$

$$\delta\phi^A = i\bar{\epsilon}\Gamma^A\psi$$

$$\delta A_i = i\bar{\epsilon}\Gamma_{i-}\psi$$

$$\delta A_+ = i\bar{\epsilon}\Gamma_{+-}\psi$$

$$\delta\psi = -\frac{1}{4}\Gamma_{ij}\Gamma_-\epsilon G_{ij} + \frac{1}{4}\Gamma_{ij}\Gamma_+\epsilon F_{ij} - \Gamma_i\Gamma_{+-}\epsilon F_{i+} + \Gamma_i\Gamma^A\epsilon D_i\phi^A + \Gamma_-\Gamma^A\epsilon D_+\phi^A$$

$$\delta G_{ij} = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_k\Gamma_{ij+}D_k\psi + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_-\Gamma_{ij+}D_+\psi + \frac{e}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_-\Gamma_{ij+}\Gamma^A[\psi, \phi^A]$$

2． 6次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

ライトライクキリングベクトル u^M, v^M を持つ6次元多様体を用意する。

$$u^M u_M = 0 \qquad \nabla_M u_N + \nabla_N u_M = 0$$

$$v^M v_M = 0 \qquad \nabla_M v_N + \nabla_N v_M = 0$$

$$u^M v_M = \lambda$$

ヤン・ミルズ場の強さと6次元テンソル場との対応

$$F_{MN} = H_{MNP} v^P \qquad G_{MN} = H_{MNP} u^P \qquad K_M = H_{MNP} u^N v^P$$

反対称テンソル

$$\varepsilon^{MNRS} = \frac{1}{\lambda} \varepsilon^{MNRSTP} v_T u_P$$

$$H_{MNP} = \widetilde{H}_{MNP} + \frac{3}{\lambda} \tilde{F}_{MN} u_P + \frac{3}{\lambda} \tilde{G}_{MN} u_P - \frac{6}{\lambda^2} K_M u_N v_P$$

$$G_{MN} = \tilde{G}_{MN} - K_M u_N + K_N u_M$$

$$F_{MN} = \tilde{F}_{MN} + K_M v_N - K_N v_M$$

2．　６次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

M5-ブレーンを記述する6次元の理論 ➡ 5次元の理論

v^M 方向の dimension reduction

(v^M 方向のリー 微分がすべての場について０)

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST}\, H_{RST}$$

自己双対性

➡

$$\tilde{F}_{MN} = \frac{1}{2}\varepsilon_{MN}{}^{RS}\,\tilde{F}_{RS} \qquad \tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{MN}{}^{RS}\,\tilde{G}_{RS}$$

自己双対性　　反自己双対性

$$\tilde{H}^{RST} = \frac{1}{\lambda^2}\varepsilon^{RSTM} K_M$$

$$\nabla_{[Q}H_{MNP]} = 0$$

ビアンキ恒等式

➡

$$\mathcal{L}_u F_{MN} = \mathcal{L}_v G_{MN} - \nabla_M K_N + \nabla_N K_M + H_{MNP}\mathcal{L}_v u^P$$

2． 6次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

M5-ブレーンを記述する6次元の理論 → 5次元の理論

v^M 方向の dimension reduction
(v^M 方向のリー微分がすべての場について0)

$$\tilde{H}^{RST} = \frac{1}{\lambda^2}\varepsilon^{RSTM}K_M \qquad \tilde{G}_{MN} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{MN}{}^{RS}\tilde{G}_{RS}$$

がオフシェルでも成り立つと仮定する。

$$H_{MNP} = \frac{1}{6}\varepsilon_{MNP}{}^{RST}H_{RST}$$

自己双対性

$$\nabla_{[Q}H_{MNP]} = 0$$

ビアンキ恒等式

→

$$\tilde{F}_{MN} = \frac{1}{2}\varepsilon_{MN}{}^{RS}\tilde{F}_{RS}$$

$$\mathcal{L}_u F_{MN} = \mathcal{L}_v G_{MN} - \nabla_M K_N + \nabla_N K_M + H_{MNP}\mathcal{L}_v u^P$$

↑

$\mathcal{L}_v u^P = 0$ であれば
運動方程式として再現する。

$$L_A = \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}^{MN}\tilde{F}_{MN} + \frac{1}{2\lambda}K^M K_M$$

2． 6次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

5次元の理論

ヤン・ミルズ場についてのラグランジアン

$$L_A = \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}^{MN}\tilde{F}_{MN} + \frac{1}{2\lambda}K^M K_M$$

ボソンϕ^A とフェルミオンψ についてのラグランジアン

$$L_m = -\frac{1}{2}(D_M\phi^A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_i D_i\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi + \frac{e}{2}\bar{\psi}\Gamma_M\Gamma^A[\psi,\phi^A]v^M$$

チャーン・サイモン項 についてのラグランジアン

$$L_{CS} = -\frac{1}{4\lambda}\varepsilon^{MNPQRS}\,\omega(A)_{MNP}\,\Omega_{QR}u_S$$

$$\Omega_{MN} = \nabla_M\left(\frac{1}{\lambda}u_N\right) - \nabla_M\left(\frac{1}{\lambda}v_N\right)$$

$$\delta\omega(A)_{MNP} = \delta A_M F_{NP}$$

超対称変換

$$\delta A_M = i\bar{\epsilon}\Gamma_{MN}\psi v^N \qquad \delta\phi^A = i\bar{\epsilon}\Gamma^A\psi$$

$$\delta\psi = \Gamma^{MNP}\epsilon\left(-\frac{1}{4\lambda}\tilde{G}_{MN}v_P + \frac{1}{4\lambda}\tilde{F}_{MN}u_P - \frac{1}{\lambda}K_M u_N v_P\right) + \Gamma^M\Gamma^A\epsilon D_M\phi^A - 4\Gamma^A\eta\phi^A - \frac{ie}{2}\Gamma_M\Gamma^{AB}\epsilon[\phi^A,\phi^B]v^M$$

$$\delta G_{MN} = -\frac{i}{2}D_Q(\bar{\epsilon}\Gamma^Q\Gamma_{MNP}\psi)u^P + \frac{e}{2}\bar{\epsilon}\Gamma_Q\Gamma_{MNP}\Gamma^A[\psi,\phi^A]u^P v^Q$$

2． 6次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

5次元の理論

ラグランジアン

$$L = L_A + L_m + L_{CS}$$

$$L_A = \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}^{MN}\tilde{F}_{MN} + \frac{1}{2\lambda}K^M K_M$$

$$L_m = -\frac{1}{2}(D_M\phi^A)^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma_i D_i\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^M D_M\psi + \frac{e}{2}\bar{\psi}\Gamma_M\Gamma^A[\psi,\phi^A]v^M$$

$$L_{CS} = -\frac{1}{4\lambda}\varepsilon^{MNPQRS}\,\omega(A)_{MNP}\,\Omega_{QR}u_S$$

超対称変換

$$\delta L = \frac{i}{2\lambda}\bar{\epsilon}\Gamma^{MN}\psi\mathcal{L}_v G_{MN} + 2e\bar{\psi}\Gamma^{AB}\mathcal{L}_v\epsilon[\phi^A,\phi^B] + 2e\bar{\psi}\Gamma^{AB}\epsilon[\mathcal{L}_v\phi^A,\phi^B] - e\bar{\psi}\epsilon[\mathcal{L}_v\phi^A,\phi^A] + \frac{i}{\lambda}\bar{\epsilon}\Gamma^{MN}\psi\mathcal{L}_v(K_M u_N)$$

$\mathcal{L}_v\epsilon = 0$　　$\mathcal{L}_v u^M = 0$　であれば $\delta L = 0$

$[\mathcal{L}_u , \mathcal{L}_v] = 0$

$\mathcal{L}_v\epsilon = 0$ を課すことなく$\delta L = 0$を導きたい！！

2． ６次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

5次元の理論

$\mathcal{L}_v\epsilon = 0$ を課すことなく $\delta L = 0$ を導く為、ワイル射影を更に２つ追加する。

６次元ワイル射影	$\Gamma\epsilon = -\epsilon$	$\Gamma\psi = \psi$	$\Gamma = \Gamma^{012345}$
$SO(5)R$-対称性を $SU(2)R$-対称性に破るワイル射影	$\hat{\Gamma}\epsilon = -\epsilon$	$\hat{\Gamma}\psi = -\psi$	$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}^{1234}$
ライトライク方向のワイル射影	$\Gamma_M\epsilon v^M = 0$		

$$L = \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}^{MN}\left(\mathcal{F}_{MN} - 2\mathcal{D}_M(v_N\phi^5)\right) + L_{CS}(\mathcal{A}) - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_M\phi^5)^2 - \frac{R}{10}{\phi^5}^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^M\mathcal{D}_M\psi$$

$$\mathcal{A}_M = A_M + v_M\phi^5$$

$$\mathcal{D}_M\Phi = \partial_M\Phi - ie[\mathcal{A}_M, \Phi]$$

$$\mathcal{F}_{MN} = F_{MN} + \mathcal{D}_M(v_N\phi^5) - \mathcal{D}_N(v_M\phi^5)$$

2．　６次元ローレンツ多様体上のM5-ブレーンをdimension reduction

5次元の理論

ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2\lambda}\tilde{G}^{MN}\left(\mathcal{F}_{MN} - 2\mathcal{D}_M(v_N\phi^5)\right) + L_{CS}(\mathcal{A}) - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_M\phi^5)^2 - \frac{R}{10}\phi^{5^2} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\Gamma^M\mathcal{D}_M\psi$$

超対称変換

ラグランジアンのすべての項を、
場の２乗か、超対称不変な$\mathcal{A}_M$で表している。

$$\delta\mathcal{A}_M = 0$$

$$\delta\phi^5 = -i\bar{\epsilon}\psi$$

$\mathcal{L}_v\epsilon = 0$ を課すことなく$\delta L = 0$ が導かれた。

$$\delta\psi = \frac{1}{4\lambda}\Gamma^{MNP}\epsilon\left(\mathcal{F}_{MN}u_P - 2\mathcal{D}_M(v_N\phi^5)\right)u_P - \frac{1}{\lambda}\Gamma^M\epsilon G_{MN}v^N + \Gamma^M\epsilon\mathcal{D}_M\phi^5$$

$$\delta G_{MN} = -\frac{i}{2}\mathcal{D}_Q(\bar{\epsilon}\Gamma^Q\Gamma_{MNP}\psi)u^P$$

３． 結論

$\mathbb{R}^{1,5}$ 上のM5-ブレーンについて、ライトライク方向の dimension reduction を行い、
6次元テンソル場の自己双対性を運動方程式として内包するラグランジアンを導出した。

$$L_A = \frac{1}{2} G_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2} F_{i+} F_{i+}$$

その後、全ラグランジアンが超対称不変であることを確認した。

$\mathbb{R}^{1,5}$ での議論を、ライトライクキリングベクトルを２つもつ6次元多様体へと拡張し、
6次元テンソル場の自己双対性を運動方程式として内包するラグランジアンを導出した。

$$L_A = \frac{1}{2\lambda} \tilde{G}^{MN} \tilde{F}_{MN} + \frac{1}{2\lambda} K^M K_M$$

ライトライク方向のワイル射影と$SO(5)R$-対称性を$SU(2)R$-対称性に破るワイル射影
を課した場合については、全ラグランジアンが超対称不変であることを確認した。