# Discrete Gravity

Chamseddine, Mukhanov

2109.03752v1[hep-th]

菅野　聡

2024/1/19

## 主張

2021年にChamseddine, Mukhanovにより

格子ゲージ理論の重力版のような

**Discrete gravity**を考案

# 目次

# Introduction

# 量子重力理論の定式化



1. 摂動的量子重力理論

→ プランクスケールで通常の幾何が破綻することがわかったが、繰り込めない ×

2. 正準形式の量子重力

→ ループ量子重力などができたが、問題もある ×

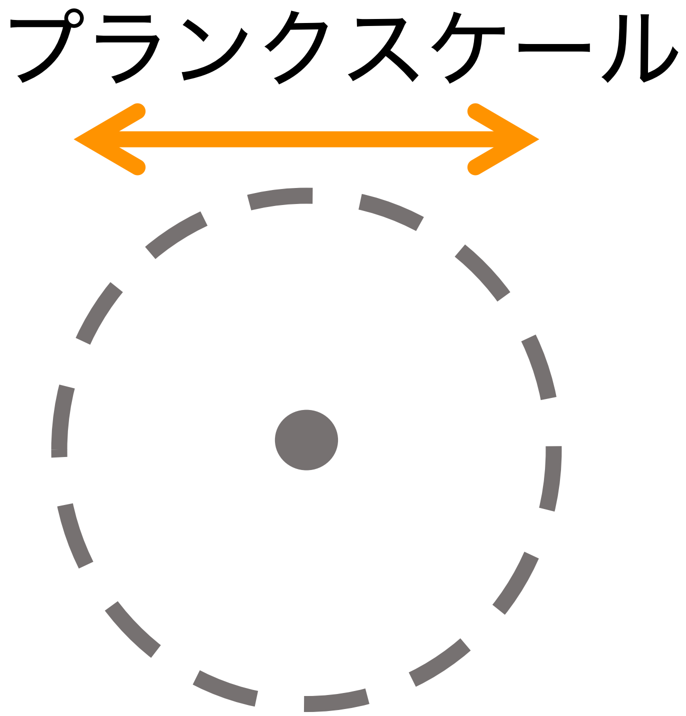
3. 格子的(離散的)な量子重力

→ Regge calculas, Euclidean Dynamical Trangulationなどがあるが、発展途上 ×

1,2,3のどれも停滞中 → 新しい定式化

**Discrete Gravity**

最大雑把アイデア




物理的に判別不可能

▼ これに基づく**幾何**の構成

量子重力理論

# 大雑把アイデア



接続付き$SO(d)$同伴束が接ベクトル束になっていて、
計量とcompatible

▼

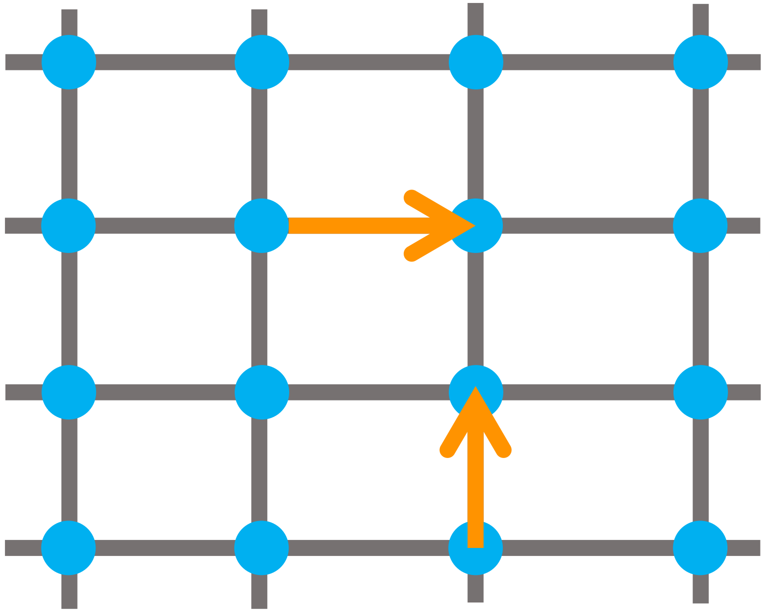
**重力理論の舞台**

接続付き$SU(N)$同伴束が接ベクトル束になってない
(内部空間だから)

▼

**ゲージ理論の舞台**

# 大雑把アイデア



リンク変数として接続を導入

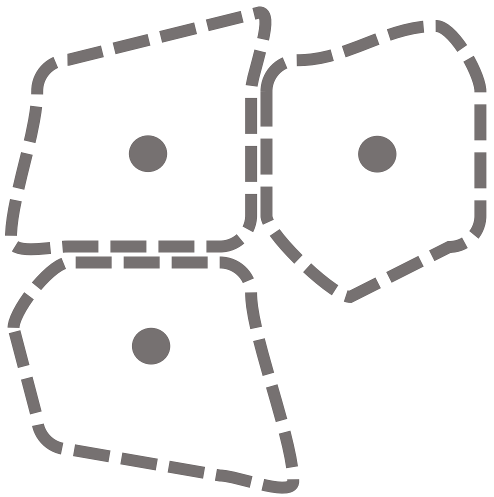
内部空間の**曲がりを記述**

これを接ベクトル束でやるのがDiscrete Gravity

# Discrete Gravityの定式化

# 離散的な空間での次元





空間はプランクスケールの最小セルから成る

**次元**

$d$ dimとは一つのセルの隣り合うセルが$2d$個

セルの位置は次のようにラベルできる

$$\mathbb{n} = \left(n^1, n^2, \cdots, n^d\right) = n^\alpha \in \mathbb{Z}^d$$

# 接ベクトルの定義



**接ベクトル**：関数の方向微分のベクトル空間

関数(離散空間)

$$\begin{aligned} f\ :\ \mathbb{Z}^d &\to \mathbb{R} \\ n^\alpha &\mapsto f(n^\alpha) \end{aligned}$$

方向微分(離散空間)

$$\mathbb{e}_\alpha(n) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}_\alpha(n) - \mathbb{E}_\alpha^{-1}(n)\right) \quad \left(\mathbb{E}_\beta(n) f(n^\alpha) := f\left(n^\alpha + \delta_\beta^\alpha\right)\right)$$

# 正規直交基底の定義



内積の存在は仮定

$$(\mathbb{v}_a, \mathbb{v}_b) = \delta_{ab}$$

を満たすような

$$\mathbb{v}_a = \bar{e}_a^\alpha \mathbb{e}_\alpha \qquad (\mathbb{e}_\alpha = e_\alpha^a \mathbb{v}_a)$$

注：$\tilde{\mathbb{v}}_a(n) = R_a^b(n)\mathbb{v}_b(n)$

$$\boldsymbol{g_{\alpha\beta}(n) = \left(\mathbb{e}_\alpha, \mathbb{e}_\beta\right) = e_\alpha^a e_\beta^b \delta_{ab}}$$

# 接続の定義



**接続**：平行移動の時の係数

平行移動(離散空間)

$$\mathbb{e}^{p.t}_{\alpha}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\to n^{\alpha}\right)=\mathbb{e}_{\alpha}(n)+\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(n)\mathbb{e}_{\gamma}(n)$$

$$\mathbb{v}^{p.t}_{a}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\to n^{\alpha}\right)=\left(\Omega^{-1}_{\beta}(n)\right)_{a}^{\ b}\mathbb{v}_{b}(n)$$

$SO(d)$の表現

$$\left(\Omega_{\beta}(n)=\exp\left(\omega^{cd}_{\beta}(n)J_{cd}\right)\right)$$

$$\left(\mathbb{v}^{p.t}_{a}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\to n^{\alpha}\right),\mathbb{e}^{p.t}_{\alpha}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\to n^{\alpha}\right)\right)=\left(\mathbb{v}_{a}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\right),\mathbb{e}_{\alpha}\left(n^{\alpha}+\delta^{\alpha}_{\beta}\right)\right)$$

**$SO(d)$の同伴束が接ベクトル束になる条件**

# リーマン接続の定義

**リーマン接続**：トーションフリーな接続 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}$

リーマン接続は多様体に対して一意に定まり、
多脚場とその微分で書ける

▼ 離散では?

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(n) = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}(n)$$

**接続は$\mathbb{e}_{\alpha}(n)$, $\mathbb{e}_{\alpha}(n + 1_{\beta})$で一意に書ける**

# 曲率の定義(若干天下り気味)



$$\widetilde{\Omega}_\beta(n) = R(n)\Omega_\beta(n)R^{-1}(n+1_\beta)$$

$$\tilde{\mathbb{v}}_a(n) = R_a^b(n)\mathbb{v}_b(n)$$

プラケットで定義

$$\boldsymbol{R_{\alpha\beta}(n) \coloneqq \frac{1}{2}\left(\Omega_\alpha(n)\Omega_\beta(n+1_\alpha)\Omega_\alpha^{-1}(n+1_\beta)\Omega_\beta^{-1}(n) - (\alpha \leftrightarrow \beta)\right)}$$

反対称化を除いてゲージ理論と同じ

# 体積素の定義(若干天下り気味)

各点でスピノルを作り、内積を定義

$$(\psi, \psi') := \sum_n \psi^\dagger(n) \cdot \psi'(n)$$

$$D(n) := iv(n)\bar{e}^\alpha(n)\left(\Upsilon_\alpha(n) - \Upsilon_\alpha^{-1}(n)\right) \quad \begin{cases} \bar{e}^\alpha(n) = \bar{e}^\alpha_a(n)\gamma^a \\ \Upsilon_\alpha(n) = \Omega_\alpha(n)\mathbb{E}_\alpha(n) \end{cases}$$

$v(n)$は$(\psi, D\psi') = (D\psi, \psi')$を保つように導入

ただの$\sum_n$ をエルミート内積$\int det(e^a_\alpha)$にするために必要

**$v(n)$は体積素!!**

# 作用の構成



Discrete Euclidean Gravityの作用

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{n})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n})$$

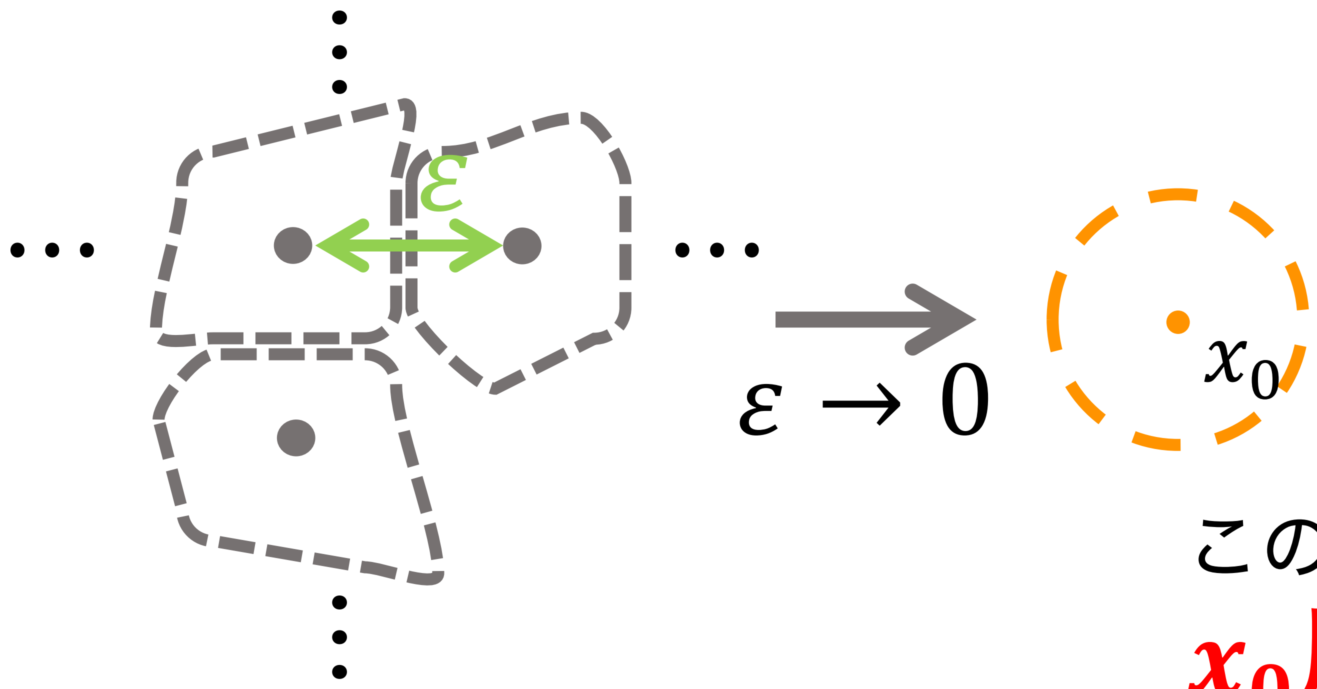
$$R(n) \coloneqq R_{\alpha\beta}{}^{cd}(n)\bar{e}_c^{\alpha}(n)\bar{e}_d^{\beta}(n)$$

# 連続極限(未完成)

# 連続極限の取り方と注意

連続極限

$$x^{\alpha} = \varepsilon n^{\alpha} \qquad (\varepsilon \to 0)$$




この連続極限では

**$x_0$周りの無限小領域**のみ

# 連続極限の結果(微分)

$$\boxed{\mathbb{E}_\beta(x) f(x^\alpha) \coloneqq f\left(x^\alpha + \varepsilon\delta^\alpha_\beta\right)}$$

$$ⅇ_\alpha(x) f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\mathbb{E}_\alpha(x) - \mathbb{E}_\alpha^{-1}(x)\right) f(x) = \frac{f\left(x^\alpha + \varepsilon\delta^\alpha_\beta\right) - f(x^\alpha - \varepsilon\delta^\alpha_\beta)}{2\varepsilon}$$

$$\Big\downarrow \ \boldsymbol{\varepsilon \to 0}$$

$$\boldsymbol{ⅇ_\alpha(x) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}$$

# 連続極限の結果(共変微分)



$$\mathbb{e}_{\alpha}^{p.t}\left(x^{\alpha}+\varepsilon\delta_{\beta}^{\alpha}\rightarrow x^{\alpha}\right)=\mathbb{e}_{\alpha}(x)+\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(x)\mathbb{e}_{\gamma}(x)\varepsilon$$

$$\mathbb{v}_{a}^{p.t}\left(x^{\alpha}+\varepsilon\delta_{\beta}^{\alpha}\rightarrow x^{\alpha}\right)=\left(\Omega_{\beta}^{-1}(x)\right)_{a}^{b}\mathbb{v}_{b}(x)\varepsilon \qquad \left(\Omega_{\beta}(x)=\exp\left(\omega_{\beta}^{cd}(x)J_{cd}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon\rightarrow 0},\ \lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{\mathbb{e}_{\alpha}^{p.t}\left(x^{\alpha}+\varepsilon\delta_{\beta}^{\alpha}\rightarrow x^{\alpha}\right)-\mathbb{e}_{\alpha}(x)}{\varepsilon}=\nabla_{\beta}\mathbb{e}_{\alpha}(x)$$

$$\boldsymbol{\nabla_{\beta}\mathbb{e}_{\alpha}(x)=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}(x)\mathbb{e}_{\gamma}(x)}$$

$$\boldsymbol{\nabla_{\beta}\mathbb{v}_{b}(x)=\omega_{\beta a}{}^{b}(x)\mathbb{v}_{b}(x)}$$

# 連続極限の結果(体積素と曲率)



$v(n)$は$(\psi, D\psi') = (D\psi, \psi')$を保つための条件を連続極限を取る

$$\boxed{\boldsymbol{v = \det(e_\alpha^a)}}$$

$$R_{\alpha\beta}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\Omega_\alpha(x)\Omega_\beta(x+\varepsilon 1_\alpha)\Omega_\alpha^{-1}\left(x+\varepsilon 1_\beta\right)\Omega_\beta^{-1}(x) - (\alpha \leftrightarrow \beta)\right)$$

$$\boldsymbol{R_{\alpha\beta}{}^{cd} = \partial_\alpha \omega_\beta{}^{cd} - \partial_\beta \omega_\alpha{}^{cd} + \omega_\alpha{}^{cl}\,\omega_{\beta l}{}^{d} - \omega_\beta{}^{cl}\,\omega_{\alpha l}{}^{d}}$$

# 連続極限の結果(作用)



Discrete Euclidean Gravityの作用

$$S = \sum_n v(n) R(n)$$

$$\downarrow \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_n \to \int dx^1 dx^2 \cdots dx^d$$

$$S = \int \det\left(e_\alpha^b\right) R(x) dx^1 dx^2 \cdots dx^d$$

アインシュタイン-ヒルベルト作用

# 展望など

# 展望など

2次元や3次元球面などで**大域的な連続極限**
が取れることが示された[Chamseddine,Malaeb,Najem]

離散的な空間を考える際によく問題になる
Liebnitz法則の破れは回避されている

この理論を足し上げたら本当に量子重力になるのか