M2 福地

QED self energies from lattice QCD without power-law finite-volume errors

Xu Feng and Luchang Jin, Phys. Rev. D 100, 094509 (2019)

Lattice QCD Calculation of the Pion Mass Splitting

Xu Feng, Luchang Jin, and Michael Joseph Riberdy, Phys. Rev. Lett. 128, 052003 (2022)

Introduction

- QED効果を入れた格子QCD計算　(QCD+QED lattice simulation)

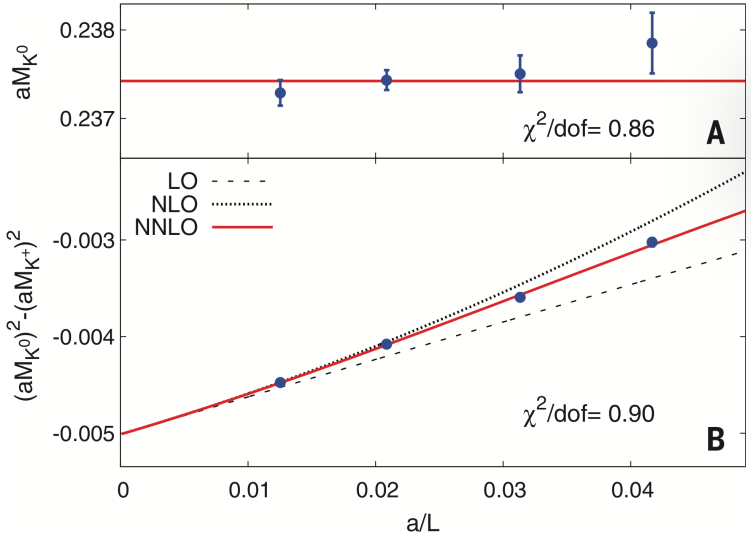
- 有限体積効果がネック ……有限の格子サイズに付随する系統不確かさ(数%～10%程度)

クォーク質量(MeV)と系統不確かさ(%)

	value (stat. error)	fit	fv	lat. spacing	QED quenching	m_s quenching	renorm
m_u	2.24(10)	+4.02	+13.50	4	2	-	2.8
m_d	4.65(15)	+3.55	-2.48	4	2	-	2.8
m_s	97.6(2.9)	+0.23	+0.07	4	2	2	2.8
$m_d - m_u$	2.411(65)	+7.77	-17.35	4	2	-	2.8
m_{ud}	3.44(12)	+2.75	+2.71	4	2	-	2.8
m_u/m_d	0.4818(96)	+5.45	+16.40	4	-		-
m_s/m_{ud}	28.31(29)	+2.91	-2.56	4	2	2	-

Electromagnetic mass splittings of the low lying hadrons and quark masses from 2+1 flavor lattice QCD+QED
T. Blum *et al*, Phys, Rev, **D82**, 094508 (2010)

K中間子質量の格子サイズ依存性



← pure QCD

← QCD+QED

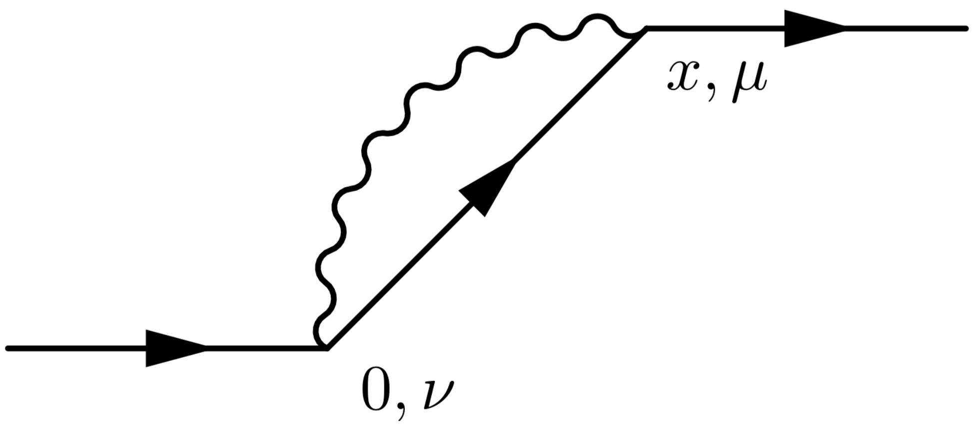
Ab initio calculation of the neutron- proton mass difference
S. Borsanyi et al, Science 347, 1452 (2015)

- 有限体積効果を抑えながら, π中間子質量差を計算

→ IVR (Infinite-Volume Reconstruction) method

“QED self energies from lattice QCD without power-law finite-volume errors”

Xu Feng and Luchang Jin, Phys. Rev. D 100, 094509 (2019)



- ハドロン2点関数の極から質量シフトを求める
- 静止ハドロン状態Nについて,
  左図の自己エネルギーを考える
- 通常の(摂動的)な場の理論の範疇

この時, ハドロンの(QED効果による)質量シフトは上図を通して

$$\Delta M = \mathcal{I} = \frac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$ と書ける.

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{2M}\langle N(\vec{0})|T[J_\mu(x)J_\nu(0)]|N(\vec{0})\rangle$$

$J_\mu = \frac{2e}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{e}{3}\bar{d}\gamma_\mu d - \frac{e}{3}\bar{s}\gamma_\mu s$ ： 電磁カレント

$|N(\vec{p})\rangle$ ： 1 粒子ハドロン状態

M ： (補正前の) ハドロン質量

$S^{\gamma}_{\mu,\nu}$ ： 光子伝播関数

質量シフト: $\Delta M = \mathcal{I} = \frac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$

ナイーブには......

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x\, \mathcal{H}_{\mu\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu\nu}(x) \to \int_{-L/2}^{L/2} d^4x\, \mathcal{H}^{L}_{\mu\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu\nu}(x)$$

この時,有限体積効果は？

ハドロン行列の遠方での振る舞い

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \sim \exp\left[-M\left(\sqrt{t^2+\vec{x}^2}-t\right)\right]$$

$$\sim e^{-M\frac{\vec{x}^2}{2t}} \quad \text{for} \quad |\vec{x}| \ll t$$

tが大きい所が問題

→ 有限体積効果が抑えられない

IVR Method

質量シフト: $\Delta M = \mathcal{I} = \dfrac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(s)} + \mathcal{I}^{(l)}$$

$$\mathcal{I}^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x) \rightarrow \mathcal{I}^{(s,L)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3\vec{x}\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(\vec{x}) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(\vec{x})$$

$$\mathcal{I}^{(l)} = \int_{t_s}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x) \rightarrow \mathcal{I}^{(l,L)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3x\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x})$$

$$\mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) = L^3 \frac{\langle N(t+\Delta T) J_\mu(t,\vec{x}) J_\nu(0) \bar{N}(-\Delta T)\rangle_L}{\langle N(t+\Delta T)\bar{N}(-\Delta T)\rangle_L}$$

N(t) : Interpolating operator annihilating the hadron state N(0) at t

ΔT : separation between source/current operators

$L_{\mu,\nu}$: QED weighting function (後述)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(s)} + \mathcal{I}^{(l)}$$

$$\mathcal{I}^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x) \rightleftarrows \mathcal{I}^{(s,L)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3\vec{x}\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$

仮に $\mathcal{H}_{\mu\nu} = \mathcal{H}^{L}_{\mu\nu}$ とすれば

$\mathcal{I}^{(s)} - \mathcal{I}^{(s,L)}$ はLで指数関数的に抑えられる.

実際, 1粒子の場合 $\mathcal{H}_{\mu\nu} - \mathcal{H}^{L}_{\mu\nu}$

自体も格子サイズのexpで抑えられていることが知られている.

M. Luscher, Commun, Math, Phys. **104**, 177 (1986)

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(s)} + \mathcal{I}^{(l)}$$

$$\mathcal{I}^{(l)} = \int_{t_s}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x) \rightleftarrows \mathcal{I}^{(l,L)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3x\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x})$$

- ハドロン行列要素の時間依存性を取り出す

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{2M} \langle N(\vec{0}) | T[J_\mu(x) J_\nu(0)] | N(\vec{0}) \rangle$$

- 完全系を入れる.

- tが大きいと仮定し, 励起状態から来る項を落とす.

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \approx \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-(E_{\vec{p}}-M)t} \cdot \frac{1}{2M} \langle N(\vec{0}) | J_\mu(0) | N(\vec{p}) \rangle \langle N(\vec{p}) | J_\nu(0) | N(\vec{0}) \rangle$$

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{M^2 + \vec{p}^2}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(s)} + \mathcal{I}^{(l)}$$

$$\mathcal{I}^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$

$$\mathcal{I}^{(l)} = \int_{t_s}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$

- 時刻を$t = t_s$に固定し、Fourier変換

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \approx \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-(E_{\vec{p}}-M)t} \cdot \frac{1}{2M} \langle N(\vec{0})|J_\mu(0)|N(\vec{p})\rangle \langle N(\vec{p})|J_\nu(0)|N(\vec{0})\rangle$$

$$\downarrow \quad t = t_s,\ \text{Fourier transformation}$$

$$\int d^3\vec{x}\,\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-(E_{\vec{p}}-M)t_s} \cdot \frac{1}{2M} \langle N(\vec{0})|J_\mu(0)|N(\vec{p})\rangle \langle N(\vec{p})|J_\nu(0)|N(\vec{0})\rangle$$

- 上2式を用いてハドロン行列を”再構成”

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \approx \int d^3\vec{y}\,\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{y}) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-(E_{\vec{p}}-M)(t-t_s)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}$$

t_sを基準時として, 任意の時刻のHが記述できた.

ハドロン行列のt依存性: $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \approx \int d^3\vec{y}\,\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{y}) \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-(E_{\vec{p}}-M)(t-t_s)} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}$

(for large |t|, t_s)

t積分を1つの関数に押し付ける

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^{(l)} &= \int_{t_s}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\,\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) \\
&\approx \int d^3\vec{x}\,\mathcal{H}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) \\
&\approx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3\vec{x}\,\mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x})
\end{aligned}
$$

……格子外の寄与はLのexpで落ちる.

$$= \mathcal{I}^{(l,L)}$$

すると, 重み付け関数は

$L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int_{t_s}^{\infty} dt\, e^{-(E_{\vec{p}}-M)(t-t_s)} \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} S^{\gamma}_{\mu,\nu}(t,\vec{x})$ と書ける.

IVR Method まとめ

質量シフト: $\Delta M = \mathcal{I} = \dfrac{1}{2}\int d^4x\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{(s)} + \mathcal{I}^{(l)}$$

$$\mathcal{I}^{(s)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$

$$\mathcal{I}^{(l)} = \int_{t_s}^{\infty} dt \int d^3\vec{x}\, \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(x)$$

$\rightarrow$

$$\mathcal{I}^{(s,L)} = \frac{1}{2}\int_{-t_s}^{t_s} dt \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3\vec{x}\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(\vec{x}) S^{\gamma}_{\mu,\nu}(\vec{x})$$

$$\mathcal{I}^{(l,L)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d^3x\, \mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x})$$

$$\mathcal{H}^{L}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) = L^3 \frac{\langle N(t+\Delta T) J_{\mu}(t,\vec{x}) J_{\nu}(0) \bar{N}(-\Delta T)\rangle_L}{\langle N(t+\Delta T)\bar{N}(-\Delta T)\rangle_L}$$

$$L_{\mu,\nu}(t_s,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int_{t_s}^{\infty} dt\, e^{-(E_{\vec{p}}-M)(t-t_s)} \int d^3y\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}} S^{\gamma}_{\mu,\nu}(t,\vec{y})$$

結局, $\mathcal{I}^{(s,L)}$ と $\mathcal{I}^{(l,L)}$ を数値計算することでΔMが求まる.

“Lattice QCD Calculation of the Pion Mass Splitting”

Xu Feng, Luchang Jin, and Michael Riberdy, Phys. Rev. Lett. 128, 052003 (2022)

- パイ中間子質量差の格子QCD計算.

$$\Delta m_{\pi} = m_{\pi+} - m_{\pi 0}$$

（現実ではΔm_{π} = 4.5936 (5) MeV）

- 初めてIVR methodを格子QCD計算に適用した.

計算の条件

- RBC/UKQCD Collaborationで生成された6つのアンサンブル上で計算
  (異なる格子体積,格子間隔で計算)
- t_sの値を変えながら計算を行う (t_sが充分大きければプラトーが見られる)
- Feynman/Coulombゲージ双方でそれぞれ計算

アンサンブルの詳細

	Volume	a^{-1} (GeV)	L (fm)	M_π (MeV)	t_{sep} (a)
48I	$48^3\times 96$	1.730(4)	5.5	135	12
64I	$64^3\times 128$	2.359(7)	5.4	135	18
24D	$24^3\times 64$	1.0158(40)	4.7	142	8
32D	$32^3\times 64$	1.0158(40)	6.2	142	8
32Dfine	$32^3\times 64$	1.378(7)	4.6	144	10
24DH	$24^3\times 64$	1.0158(40)	4.7	341	8

Feynman Gauge : $S^{\gamma}_{\mu\nu}(x) = \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{4\pi^2 x^2}$

Coulomb Condition:

$$S^{\gamma}_{\mu,\nu}(t,\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta(t) & (\mu=\nu=0) \\ \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(\delta_{i,j} - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^2}\right) e^{-|\vec{p}|t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} & (\mu=i,\nu=j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

結果

	Feyn (MeV)	Coul (MeV)
48I	4.283(21)	4.375(25)
64I	4.415(14)	4.459(15)
24D	3.632(10)	3.823(12)
32D	3.598(12)	3.825(13)
32Dfine	4.002(18)	4.109(21)
24DH	2.406(37)	2.509(12)

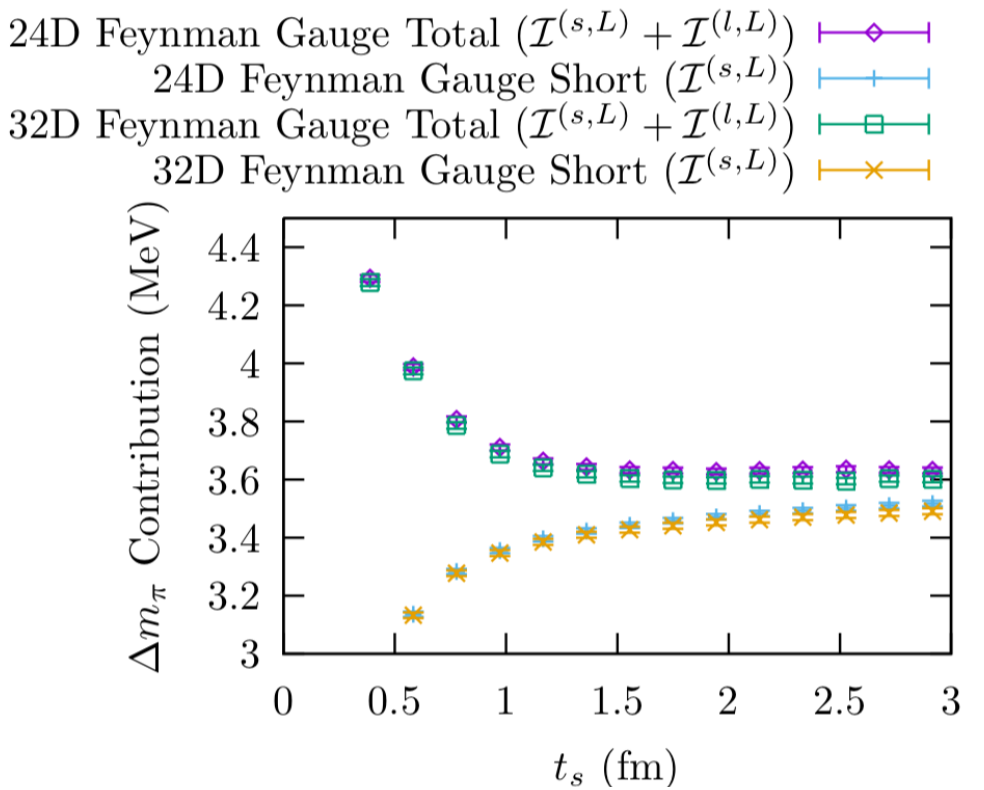
24D—32D間の percentage difference

Feynman Gauge：0.94(61) %

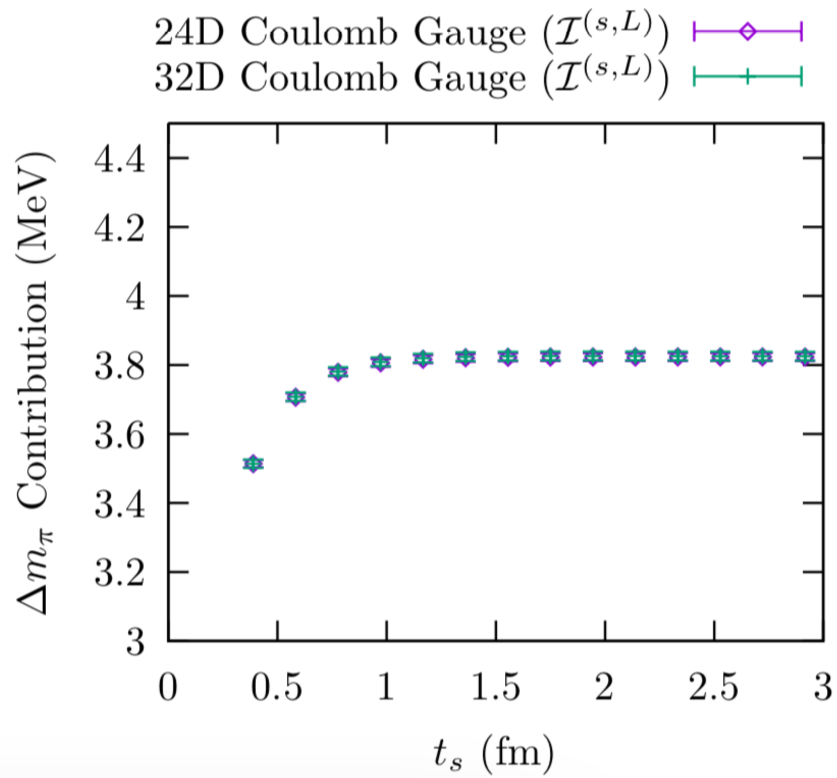
Coulomb Gauge：0.05(65) % (不確かさの範囲内)

有限体積効果は抑えられている

Feynman Gauge

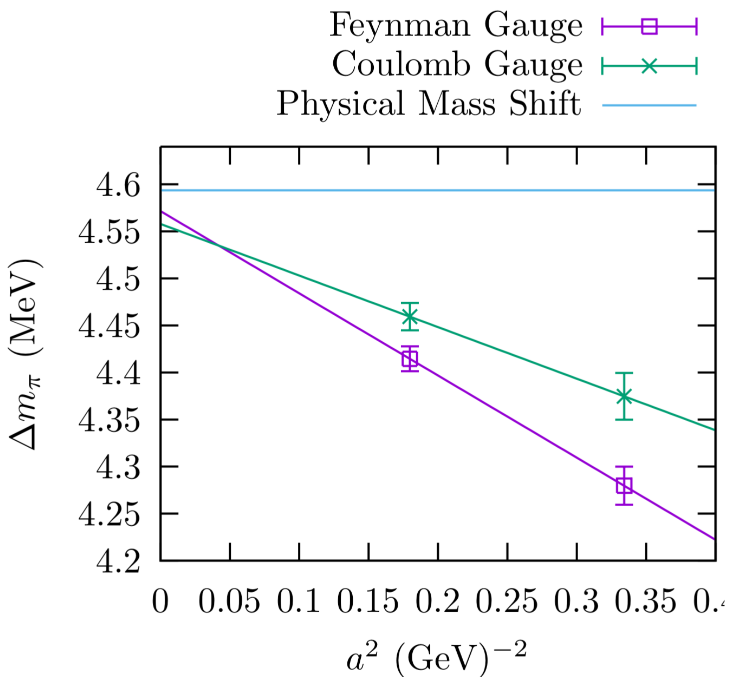


Coulomb Condition



physical pointへの外挿

連続外挿(IWSAKI 48I/64I)



アンサンブルの詳細

	Volume	a^{-1} (GeV)	L (fm)	M_π (MeV)	t_{sep} (a)
48I	$48^3 \times 96$	1.730(4)	5.5	135	12
64I	$64^3 \times 128$	2.359(7)	5.4	135	18
24D	$24^3 \times 64$	1.0158(40)	4.7	142	8
32D	$32^3 \times 64$	1.0158(40)	6.2	142	8
32Dfine	$32^3 \times 64$	1.378(7)	4.6	144	10
24DH	$24^3 \times 64$	1.0158(40)	4.7	341	8

連続極限を取った後に”有限体積補正”

補正後の値(IWASAKI 48I/64I)

	Total (MeV)
Feyn	4.534(42)(43)
Coul	4.560(46)(41)

補正後の値(24D,32Dfine,24DH)

	Total (MeV)
Feyn	4.706(50)(106)
Coul	4.753(58)(160)

凡例：Mass Shift (statistic error)(systematic error) MeV

“24D—32間の差を用いて有限体積補正を見積もった”
とのことだが, 具体的な操作は明記されていない.

まとめ

- IVR methodを用いた初めての格子QCD計算
- 格子間隔/体積を変えながらπ中間子質量差を計算
- 比較的有限体積効果を抑えられている(‰単位)
- Feynman/Coulombゲージ条件で一貫性のある結果

$$\Delta m_\pi = 4.534\ (42)(43)\ \text{MeV}\ \text{(for Feynman gauge)}$$

$$\Delta m_\pi = 4.560\ (46)(41)\ \text{MeV}\ \text{(for Coulomb gauge)}$$