

Double scaling limits of Dirac ensembles and Liouville quantum gravity

arXiv: 2204.14206v1 [math-ph] 29 Apr 2022

Hamed Hessam, Masoud Khalkhali, and Nathan Pagliaroli

2022/6/24. D1 菅野聡

① Introduction

(経路積分形式での)量子重力理論の定式化は

$$Z = \int dg \dots e^{-S(g, \dots)}$$

のように可能な全ての計量を足しあげる必要がある



繰り込みが不可能であることが知られている

何か別の方法で「計量の足しあげ」を行うことを考える

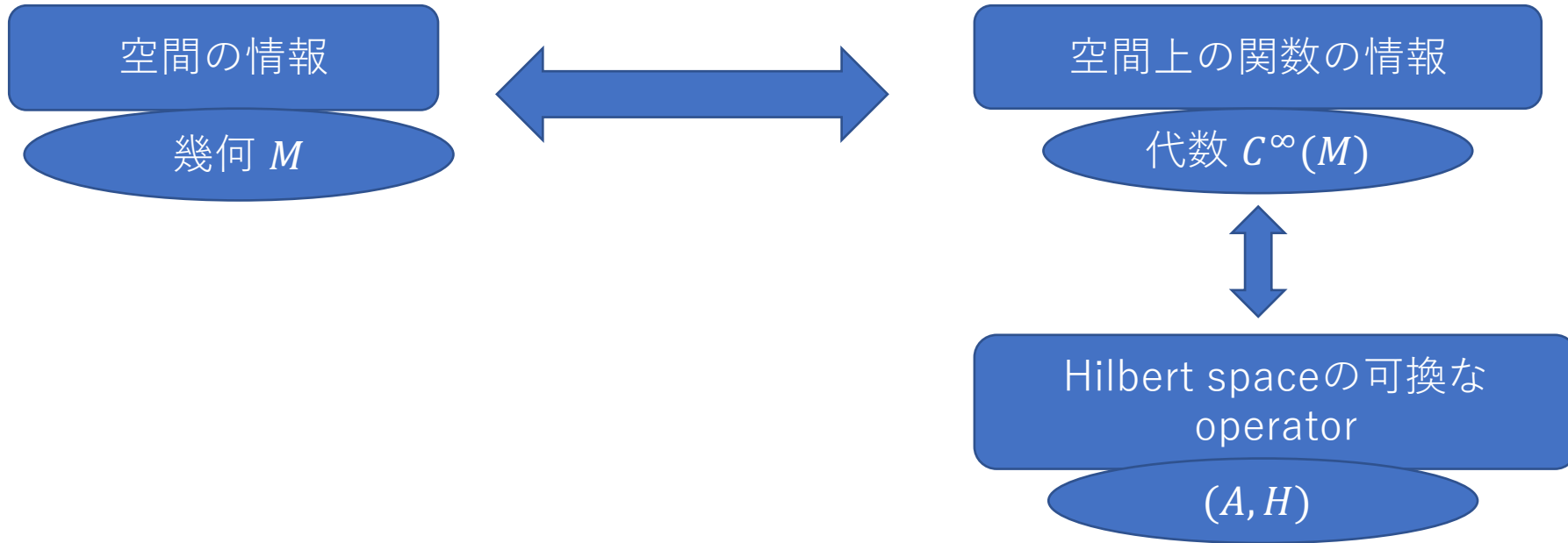
この論文では

1. Connesのspectral tripleを考える
2. Latticeの離散化を考える

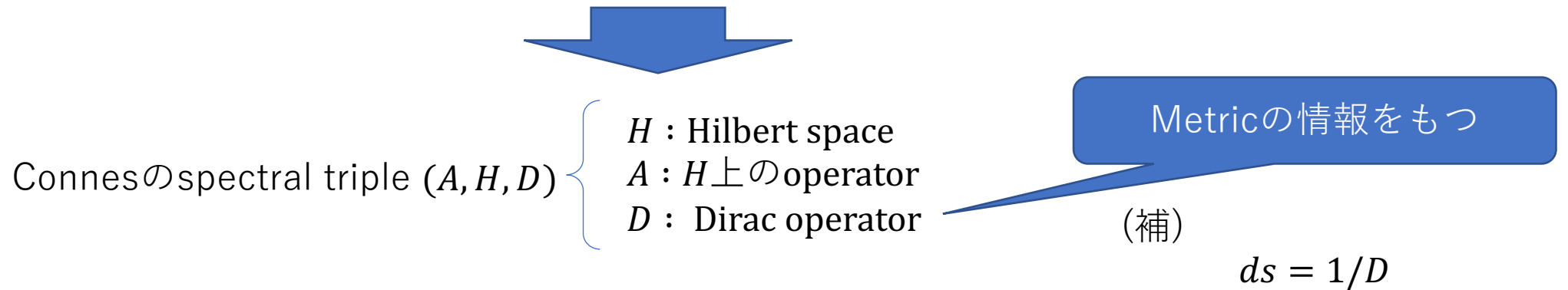
の二つのアイデアを用いた量子重力理論の定式化を行う

→ Dirac ensembleと呼ばれる

1. Connesのspectral triple



物理ではmetricの入った空間を考えたいので、 (A, H) にmetricに対応するものを入れる



(例) $(A, H, D) = (C^\infty(M), L^2(S), D)$

$C^\infty(M) \rightarrow M$ 上のなめらかな関数
 $L^2(S) \rightarrow M$ 上の「いい性質」を持つ spinor

$f \in C^\infty(M) \quad \psi \in L^2(S)$

$$\psi(x) \mapsto f\psi(x) = f(x)\psi(x)$$

の写像によって、 f は

$$f : L^2(S) \rightarrow L^2(S)$$

$L^2(S)$: Hilbert space
 $C^\infty(M)$: $L^2(S)$ 上の operator

大雑把なイメージ

$$D = \gamma^a \partial_a$$
$$[D, f] = \gamma^a \partial_a f$$

$$\gamma^a \gamma^b = -\gamma^b \gamma^a \quad (a \neq b)$$

微分形式のようなものができる \rightarrow 体積形式が作れて、metricができる

2. Latticeの離散化の手法

1. によって、経路積分のmetricのたしあげは (A, H, D) の D の足しあげによって定式化できる

Spectral actionの考えが出る

- (1) (A, H, D) のうち (A, H) をfermion spaceと呼ぶ
- (2) fermion spaceを固定したとき許される全てのDirac operator D の集合を \mathcal{G} と書く
- (3) action $S : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて

$$Z = \int dD e^{-S(D)}$$

によって量子重力を定式化する



一般に無限次元のHilbert space上のoperatorを全て足しあげていて、困難であることが知られている



離散化することで厳密に定式化する

Spectral tripleの立場では離散化は素朴に考えられる
→Hilbert spaceを有限次元にすれば良い

$$D : H \rightarrow H$$

有限のvector spaceであることから、 D は行列で表現できる



Finite spectral triple の spectral action は行列模型によって表現可能

Dirac ensemble

この論文の主張

Dirac ensembleはちゃんと量子重力を含む

特定のparameterでのtype (0,1) Dirac ensemble



One matrix model



Liouville gravity

Noncommutative geometryの足しあげが量子重力になる一つの例

Dirac ensembleの歴史

J. Barrett 1502.05383v2[math-ph]
Dirac ensembleが提唱された

J. Barrett , L. Glaser 1510.01377v2[gr-qc]
Dirac ensembleのmonte carlo simulationが行われた

Shahab Azarfar, M. Khalkhali 1906.09362v1[math-ph]
Dirac ensembleでもtopological recursionが使えること示した

Hamed Hessam, M. Khalkhali, Nathan Pagliaroli 2107.1033v2[hep-th]
Bootstrapによる解析が行われた

Hamed Hessam, Masoud Khalkhali, and Nathan Pagliaroli 2204.14216v1[hep-th]
Dirac ensembleの最近の進展をまとめたreview

② 論文の詳細

Type (0,1) Dirac ensembleについて

Type (p, q) の Clifford algebra は $\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ ($n = p + q$) の n の行列で

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}$$

を満たす。

この行列が作用する vector space を $V_{p,q}$ と書く

$$\eta^{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1, -1, \dots, -1)$$

1の数が q 、-1の数が p

Type (p, q) の Dirac ensemble で用いる spectral triple は

$$(M(n, \mathbb{C}), V_{p,q} \otimes M(n, \mathbb{C}), D)$$

(p, q) によって異なる

Type (0,1) では、Clifford algebra は 1×1 行列で

$$\gamma^1 = 1$$

であり、spectral triple は

$$(M(n, \mathbb{C}), M(n, \mathbb{C}), D)$$

で、許される Dirac operator は Hermitian matrix を用いて

$$D = H \otimes I + I \otimes H$$

簡単な主張の流れ

Dirac ensemble

$$\begin{aligned} S(D) &= \frac{t_2}{4} \text{Tr} D^2 + \frac{t_4}{8} \text{Tr} D^4 \\ &= \frac{N}{2} t_2 \text{Tr} H^2 + \frac{N}{4} t_4 \text{Tr} H^4 + \frac{3}{4} t_4 \text{Tr} H^2 \text{Tr} H^2 \end{aligned}$$

を考える。このとき、 $W_k^g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ を計算してone matrix modelと比較する。

ここで、

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_k} = \frac{1}{N^k Z} \int dH \text{Tr} H^{l_1} \text{Tr} H^{l_2} \dots \text{Tr} H^{l_k} e^{-S(H)}$$

で定義しとき、topological expansionで

$$T_{l_1, l_2, \dots, l_k} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g-k} T_{l_1, l_2, \dots, l_k}^g$$

と展開できて、これを用いて W_k^g は次で定義できる

$$W_k^g(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_k=0}^{\infty} N^{2-2g-k} \frac{T_{l_1, l_2, \dots, l_k}^g}{x_1^{l_1+1} x_1^{l_2+1} \dots x_1^{l_k+1}}$$

$$\begin{aligned} W_1^0(x) &= \sum \frac{\lim \left\langle \frac{1}{N} \text{Tr} H^l \right\rangle}{x^{l+1}} \\ &= \lim \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-H} \right\rangle \end{aligned}$$

と書けることから、 W_1^0 のbranch cut
が固有値分布になる

Schwinger-Dyson equation

$$\sum_{i,j} \int \frac{\partial}{\partial H_{ij}} \left((H^{l_1})_{ij} \prod_{m=2}^k \text{Tr} H^{l_m} e^{-S(H)} \right) dH = 0$$

SD equationの W_1^0 の部分は次のようにかける

$$W_1^0(x)^2 = S'_{eff}(x)W_1^0(x) - P(x)$$

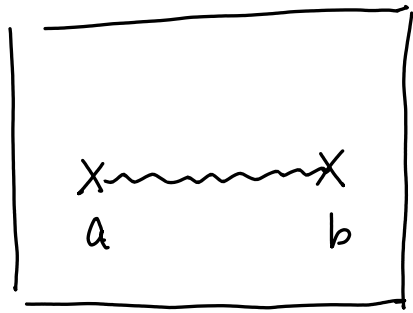
$$\begin{cases} S_{eff}(x) = \frac{1}{2}\tilde{t}_2 x^2 + \frac{1}{4}t_4 x^4 & (\tilde{t}_2 = t_2 + 3T_2^0 t_4) \\ P(x) = \tilde{t}_2 + t_4 x^2 + t_4 T_1^0 x^1 + t_4 T_2^0 \end{cases}$$

$$W_1^0(x) = \frac{1}{2} \left(S'_{eff}(x) - \sqrt{S'_{eff}(x) - 4P(x)} \right)$$

ここの $\sqrt{\quad}$ から、branch cutが出てくる

Branch cutがあることから

$$S'_{eff}(x) = W_1^0(x + i0) + W_1^0(x - i0)$$

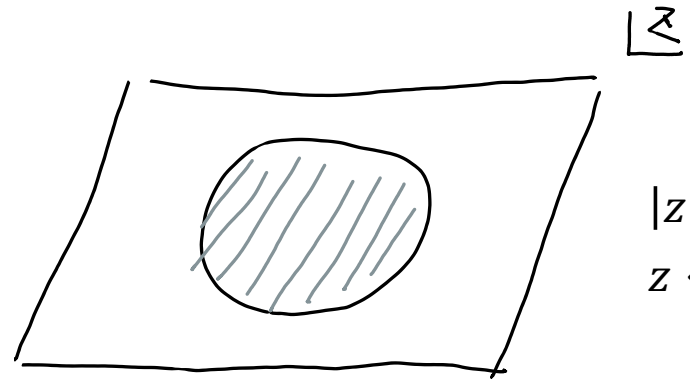
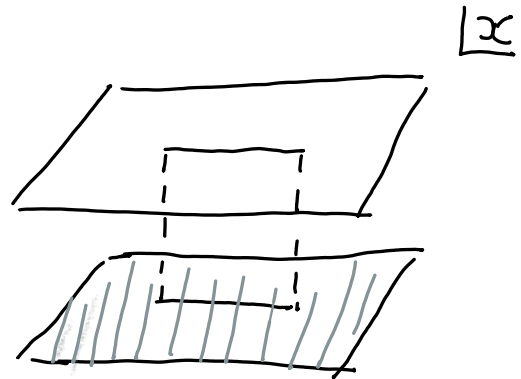


固有値が $[a, b]$ に分布している1-cut解を考えると、 $\sqrt{\quad}$ の中は次のようになる

$$S'_{eff}(x) - 4P(x) = (M(x)^2)(x - a)(x - b)$$

ここで、 $M(x) = \frac{S'_{eff}(x)}{x} + \dots$ としている

Zhukovsky変換



$|z| = 1$ 上にbranch cutが写される。
 $z \leftrightarrow \frac{1}{z}$ で内側と外側の変換

変換は

$$x(z) = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{4} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

逆変換

$$z(x) = \frac{2}{a - b} \left(x - \frac{a + b}{2} \pm \sqrt{\left(x - \frac{a + b}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{a - b}{4} \right)^2} \right)$$

$W_1^0(x(z))$ を考える。

上のsheetでの $x \rightarrow \infty$ での z の振る舞いは $x \sim \frac{4}{a-b}z$ のように比例の関係になる。

また、 $z \rightarrow \infty$ では上のsheetでの $x \rightarrow \infty$ に対応する。 W_1^0 が $x \rightarrow \infty$ で発散しないことから

$$W_1^0(x(z)) = \sum_{k=0}^3 u_k z^{-k}$$

のように展開できる。

$$\begin{aligned} S'_{eff}(x(z)) &= W_1^0(x(z)) + W_1^0\left(x\left(\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^3 u_k (z^k + z^{-k}) \end{aligned}$$

であることがわかる。まとめると

$$S_{eff}(x) \text{がわかる} \rightarrow u_k \text{がわかる} \rightarrow W_1^0 \text{がわかる}$$

注意

a, b もわからないといけない

$$T_2^0 = -\frac{1}{2\pi i} \oint x^2 W_1^0(x; T_2^0)$$

も注意する必要がある。

Dirac ensembleは

$$S_{eff}(x) = \frac{1}{2}\tilde{t}_2 x^2 + \frac{1}{4}t_4 x^4 \quad (\tilde{t}_2 = t_2 + 3T_2^0 t_4)$$

ここで、one matrix modelは

$$S_M(M) = \frac{N}{2}\text{Tr}M^2 + \frac{N}{4}g\text{Tr}M^4$$

であり、

$$S_{M-eff}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{g}{4}x^4$$

以上より

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{t}_2 = t_2 + 3T_2^0 t_4 = 1 \\ t_4 = g \end{array} \right.$$

を満たすとき、 W_1^0 は一致する。

次に、SD equationの $W_2^0(x, x')$ の部分では、branch cutをまたぐと $\sqrt{}$ が -1 倍されることを用いて

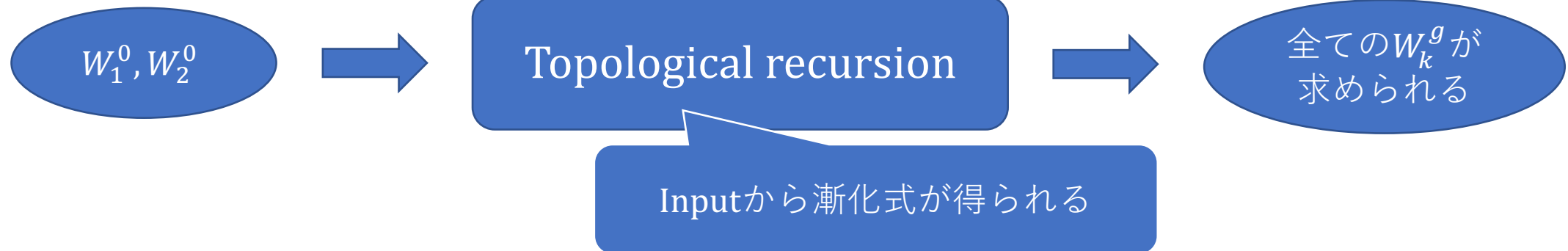
$$W_2^0(x + i0, x') + W_2^0(x - i0, x') = -\frac{1}{(x - x')^2}$$

の関係式を満たしており、 W_2^0 は作用によらない普遍な量であることがわかる。

→one matrix modelとDirac ensembleは作用の違いしかないので、 W_2^0 は一致する

Topological recursion

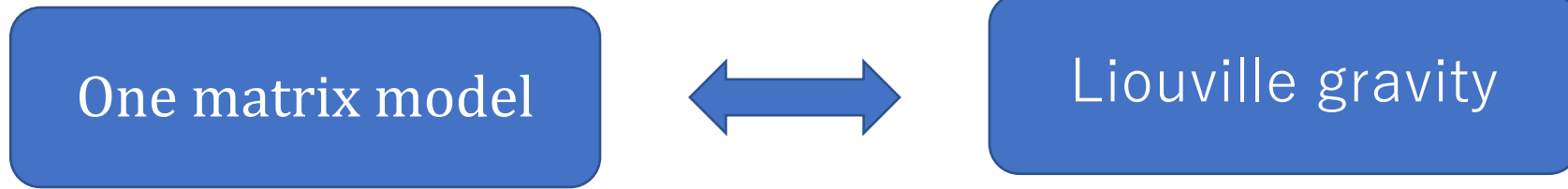
Dirac ensembleでも、topological recursionが使えることが示されている



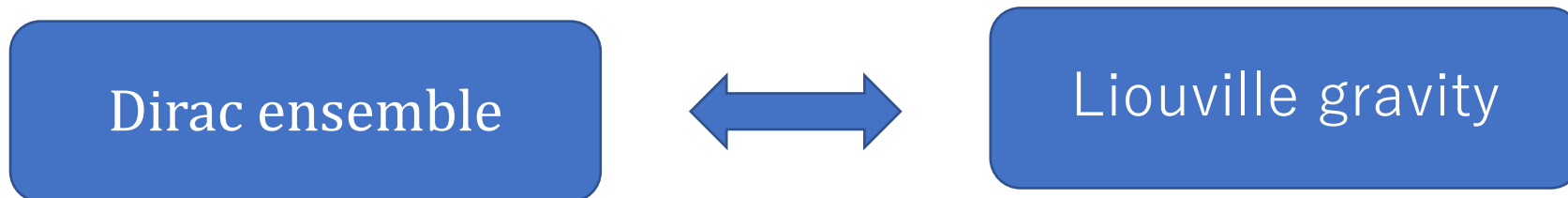
以上より、 $t_2 = 1 + 3T_2^0 t_4$ 上で、Dirac ensembleとone matrix modelは一致する。
また、one matrix model

$$S_M(M) = \frac{N}{2} \text{Tr} M^2 + \frac{N}{4} g \text{Tr} M^4$$

は $N \rightarrow \infty$ で臨界点 $g = -\frac{1}{12}$ にしたとき



よって、 $t_2 = 1 - \frac{1}{4} T_2^0$ とすると



まとめ

Dirac ensembleはnoncommutative geometryの足しあげである。

特定のDirac ensembleは量子重力を含む。

この論文では、type (0,1) Dirac ensembleが調べられている

Higher dimでは解析的には解けないので、BootstrapやMonte carloなどによって振る舞いが調べられている