Bootstrapping Matrix Quantum Mechanics

X. Han, S. A. Hartnoll, J. Kruthoff

Phys.Rev.Lett. 125 (2020) 4, 041601

イントロダクション

◆ Old type matrix model （⇔ Noncritical string)

e.g. $S = \sum_k t_k \mathrm{Tr} M^k$

◆ IKKT matrix model （⇔ Type IIB superstring theory)

$$S = \mathrm{Tr}[X^A, X^B]^2 + \text{fermions}$$

0次元

◆ BFSS matrix model （⇔ M-theory on $R^{1,10}$)

$$S = \int dt \mathrm{Tr}\left\{(DX^A)^2 + [X^A, X^B]^2\right\} + \text{fermions}$$

1次元（量子力学系）

Large-Nで解ける模型は主に1-matrix modelのみ
数値計算（モンテカルロ法）はlarge-Nでコストがかかる。他に何かよい方法はないか？
⇒ 「bootstrap法」の提案

紹介する論文＆関連する論文

- H. W. Lin, JHEP 06 (2020) 090.

  “行列模型のBootstrapping”の基本的なアイデアが与えられた（0次元行列模型）

- X. Han, S. A. Hartnoll, J. Kruthoff PRL 125 (2020) 4, 041601. ←この論文を紹介

  Bootstrapppingが1次元の行列模型（量子力学系）にも適用できることが示された

- V. Kazakov, Z. Zheng, arXiv:2108.04830 [hep-th].

  解析的なbootstrappingの理解と2-matrix modelへの応用

- D. Berentstein, G. Hulsey, arXiv:2108.08757 [hep-th].

  色々な量子力学系への応用

- cf. D. Anderson, M. Kruczenski, NPB 921 (2017) 702.

  格子理論でのBootstrapping

量子力学のbootstrapping

◆ 例として以下の1自由度の量子力学系を考える

$$H = p^2 + x^2 + gx^4, \qquad [p, x] = -i$$

◆ 準備１（以下での期待値は「エネルギーの固有状態」での期待値とする）

$\langle [H, \mathcal{O}] \rangle = 0$ が常に成り立つ

$$\mathcal{O} = x^s, \qquad [H, \mathcal{O}] = [p^2, x^s] = p[p, x^s] + [p, x^s]p$$
$$= -is(px^{s-1} + x^{s-1}p)$$
$$= -is(2x^{s-1}p - i(s-1)x^{s-2}) \quad \Rightarrow \quad \langle 2x^{s-1}p \rangle = i(s-1)\langle x^{s-2} \rangle$$

$\mathcal{O} = x^t p,$ 　同様の計算により　$4t\langle x^{t-1}p^2 \rangle = 8g\langle x^{t+3} \rangle + 4\langle x^{t+1} \rangle - t(t-1)(t-2)\langle x^{t-3} \rangle$

従って、p^2 が１つ入った期待値は x のみの期待値から求められる

◆ 準備2

$$\langle \mathcal{O}H \rangle = E\langle \mathcal{O} \rangle \qquad \mathcal{O} = x^{t-1}$$

$$\langle x^{t-1}(p^2 + x^2 + gx^4) \rangle = E\langle x^{t-1} \rangle$$

準備1で得た等式を使って、p^2 の入った項を消去すると、

$$t(t-1)(t-2)\langle x^{t-3} \rangle + 4tE\langle x^{t-1} \rangle - 4(t+1)\langle x^{t+1} \rangle - 4g(t+2)\langle x^{t+3} \rangle = 0$$

従って、E と $\langle x^2 \rangle$ が分かれば、他の全ての $\langle x^{2n} \rangle$ が求められる（対称性から奇数冪の期待値はゼロ）

E と $\langle x^2 \rangle$ の満たす強いconstraintを導いて、これらの値を推測しようというのがBootstrapping

◆ Positivity constraint

$\langle \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \rangle \geq 0$ が任意の演算子 $\mathcal{O}$ に対して成立 ⇒ これが非常に強いconstraintを与える

例として $\mathcal{O} = \sum_{i=0}^{K} c_i x^i$ の形の演算子を考える

$$\langle \mathcal{O}^\dagger \mathcal{O} \rangle \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i,j=0}^{K} c_i^* \langle x^{i+j} \rangle c_j \geq 0$$ が任意の $\{c_i\}$ に対して成立

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}_{ij} = \langle x^{i+j} \rangle$ で与えられる(K+1)×(K+1)行列はpositive semidefinite

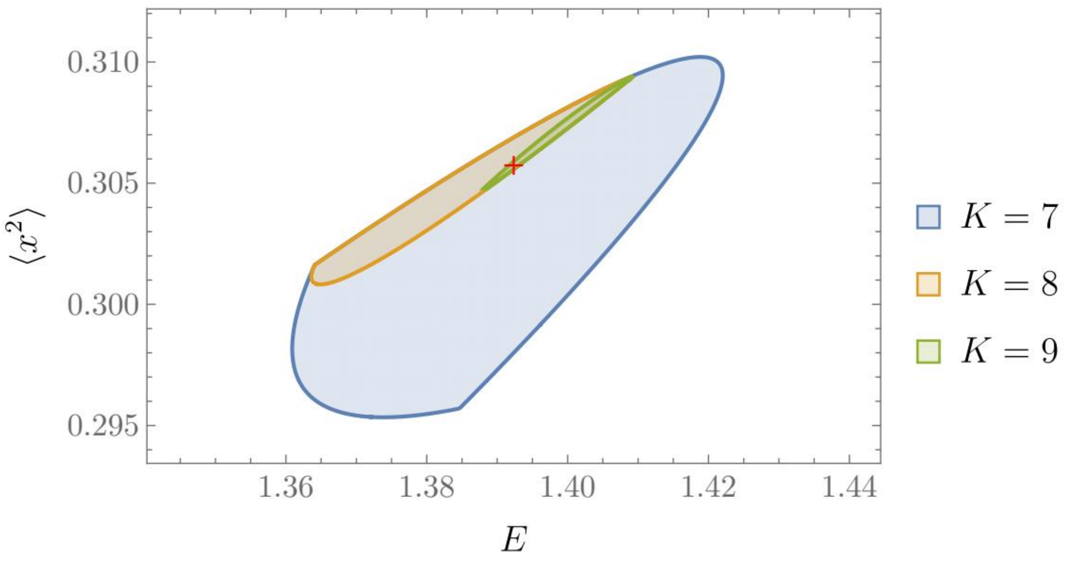
◆ Bootstrapping

1. Kを一つ決める
2. Test value $(E, \langle x^2 \rangle)$ を適当に与えて行列 $\mathcal{M}$ を求める（準備２の結果を使う）
3. $\mathcal{M}$≧0をチェックする（もし一つでも負の固有値があればtest valueは偽）

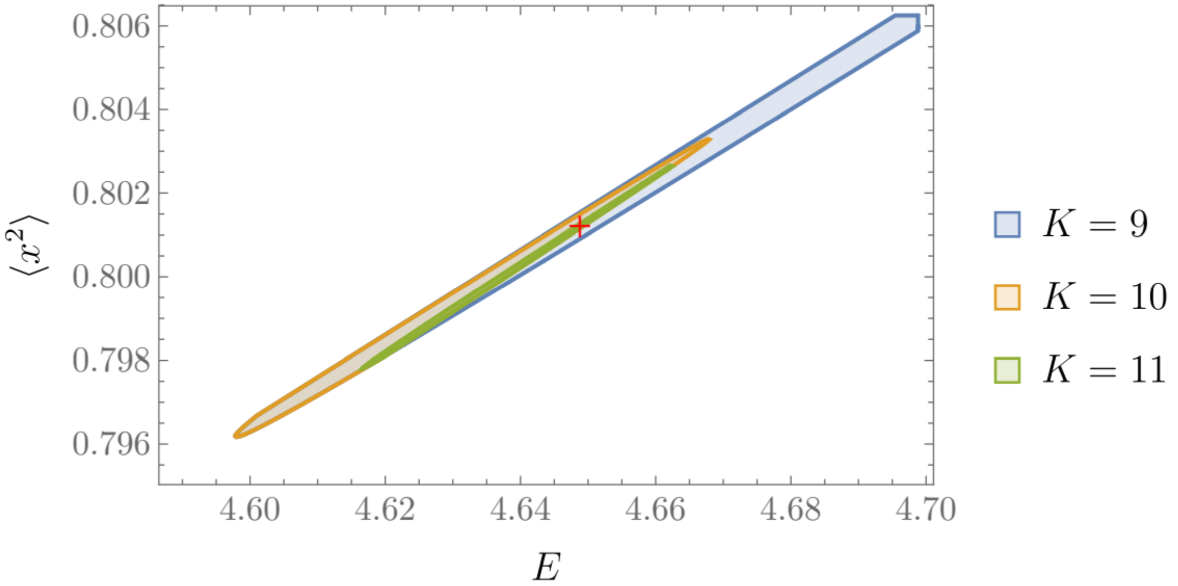
このようにして許される $(E, \langle x^2 \rangle)$ の範囲を限定することができる

◆ Bootstrappingの結果（ $g = 1$ ）

Ground state



1st excited state



◆ Kが無限大の極限では、constraintを満たす領域が真の値に収束する

$\mathcal{A} : C^* -\mathrm{algebra}$

$\langle \cdot \rangle : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ で $\langle \mathbf{1} \rangle = 1, \langle a^\dagger a \rangle \geq 0 \text{ for } \forall a \in \mathcal{A}$ を満たす線形写像は必ず

あるヒルベルト空間上の状態 ρ を使って $\langle a \rangle = \mathrm{tr}(\rho a)$ と表すことができる

さらに $\langle \mathcal{O} H \rangle = E \langle \mathcal{O} \rangle$ ならば、ρ はエネルギー固有状態となる

一般論

- 適当な $\mathcal{O}_i(i=1,2,\cdots,K)$ を選ぶ

- $\mathcal{M}_{ij}=\langle\mathcal{O}_i^\dagger\mathcal{O}_j\rangle$ をtest valueに対して計算する

  この際、$\mathcal{M}$ の全ての行列要素がtest valueになると意味がない
  使える条件をフルに使って行列要素の間の関係をできる限りつけておく

  ・$\langle[H,\mathcal{O}]\rangle=0$, $\langle\mathcal{O}H\rangle=E\langle\mathcal{O}\rangle$
  ・$\langle\mathcal{O}^\dagger\rangle=\langle\mathcal{O}\rangle^*$
  ・系の対称性 etc.

- $\mathcal{M}$ ≧0をチェックする（1つでも負の固有値があればtest valueは偽）

1次元の行列模型のbootstrapping

- 適当な（トレースを取っていない）演算子 $\mathcal{O}_i (i = 1, 2, \cdots, K)$ を選ぶ

- $\mathcal{M}_{ij} = \langle \mathrm{tr}\, \mathcal{O}_i^\dagger \mathcal{O}_j \rangle$ をtest valueに対して計算する

  $\mathcal{M}$ の要素を関係づけるのに使える条件

  ・$\langle [H, \mathcal{O}] \rangle = 0$, $\langle \mathcal{O} H \rangle = E \langle \mathcal{O} \rangle$
  ・$\langle \mathcal{O}^\dagger \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle^*$
  ・ゲージ対称性
  ・トレースの巡回性 etc

- $\mathcal{M} \geqq 0$をチェックする（1つでも負の固有値があればtest valueは偽）

具体例

◆ 以下の模型を考える

$$H = \mathrm{tr}P^2 + \mathrm{tr}X^2 + \frac{g}{N}\mathrm{tr}X^4$$

$X, P : N \times N$ エルミート行列

$[P_{ij}, X_{kl}] = -i\delta_{il}\delta_{jk}$

◆ 例えば $\langle [H, \mathrm{tr}XP] \rangle = 0$ から、$\langle \mathrm{tr}P^2 \rangle = \langle \mathrm{tr}X^2 \rangle + \dfrac{2g}{N}\langle \mathrm{tr}X^4 \rangle$ という関係式が得られる

◆ ゲージ対称性

生成子： $G = i[X, P] + N\mathbf{1}$

物理的な状態はゲージ不変でないといけないので任意の演算子に対して $\langle \mathrm{tr}G\mathcal{O} \rangle = 0$

例えば $\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{tr}G \rangle = 0, \\ \langle [H, \mathrm{tr}X^2] \rangle = 0 \end{array} \right.$ から $\langle \mathrm{tr}XP \rangle = -\langle \mathrm{tr}PX \rangle = \dfrac{iN^2}{2}$ が従う

◆ トレースの巡回性

無限次元のトレースなので素朴な巡回性はないが、例えば以下のような関係がある

$$\langle \mathrm{tr} X P^3 \rangle = \langle X_{ij} P_{jk} P_{kl} P_{li} \rangle$$

$$= \langle \underbrace{[X_{ij}, P_{jk}]}_{i\delta_{ik}\delta_{jj}} P_{kl} P_{li} \rangle + \langle P_{jk} \underline{X_{ij}} P_{kl} P_{li} \rangle$$

同様にこのXを一番右まで持っていく

$$= \langle \mathrm{tr} P^3 X \rangle + 2iN \langle \mathrm{tr} P^2 \rangle + i \langle \mathrm{tr} P \rangle \langle \mathrm{tr} P \rangle$$

ここでlarge-N factorizationを用いた

$$\langle \mathrm{tr} P \mathrm{tr} P \rangle \sim \langle \mathrm{tr} P \rangle \langle \mathrm{tr} P \rangle$$

◆ Bootstrapの例 $\{\mathcal{O}_i\} = \{\mathbf{1}, X^2, X, P\}$

対称性より奇数冪の期待値はゼロ

$\mathcal{M}$ の行列要素

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & I & X^2 & X & P \\
\hline
I & \underbrace{\langle \mathrm{tr}\, I \rangle}_{N} & \langle \mathrm{tr}\, X^2 \rangle & 0 & 0 \\
X^2 & \langle \mathrm{tr}\, X^2 \rangle & \langle \mathrm{tr}\, X^4 \rangle & 0 & 0 \\
X & 0 & 0 & \langle \mathrm{tr}\, X^2 \rangle & \underbrace{\langle \mathrm{tr}\, X P \rangle}_{\frac{iN^2}{2}} \\
P & 0 & 0 & \underbrace{\langle \mathrm{tr}\, P X \rangle}_{-\frac{iN^2}{2}} & \underbrace{\langle \mathrm{tr}\, P^2 \rangle}_{\langle \mathrm{tr} X^2 \rangle + \frac{2g}{N} \langle \mathrm{tr} X^4 \rangle}
\end{array}
$$

Positivity constraint

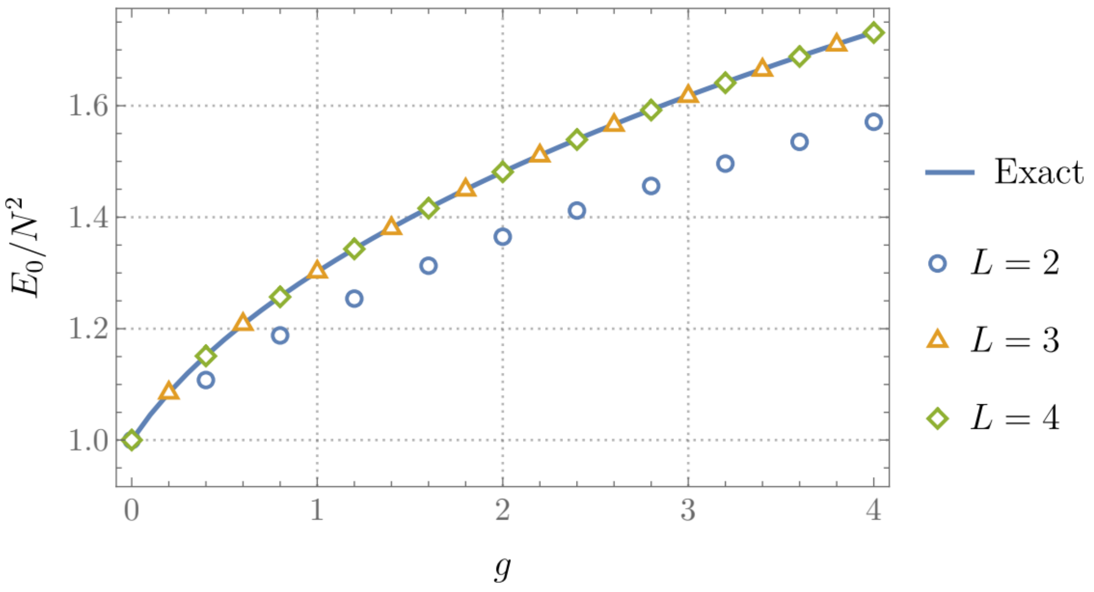
$$N\langle \mathrm{tr} X^4 \rangle \geq \langle \mathrm{tr} X^2 \rangle^2$$

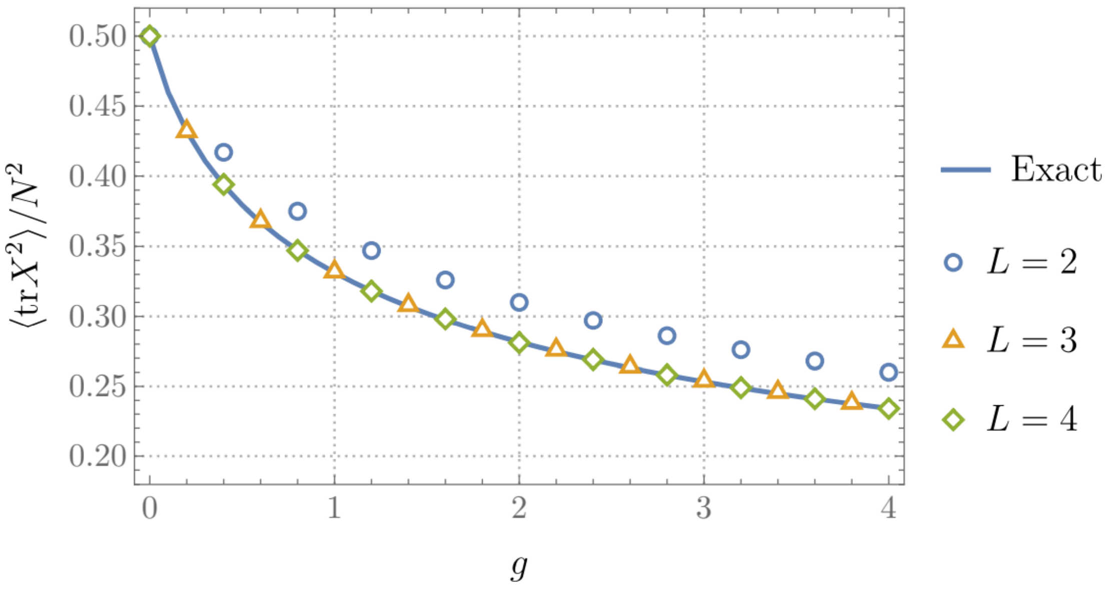
$$\langle \mathrm{tr} X^2 \rangle \left(\langle \mathrm{tr} X^2 \rangle + \frac{2g}{N} \langle \mathrm{tr} X^4 \rangle \right) \geq \frac{N^4}{4}$$

確かに非自明な不等式を与えている

解析と結果

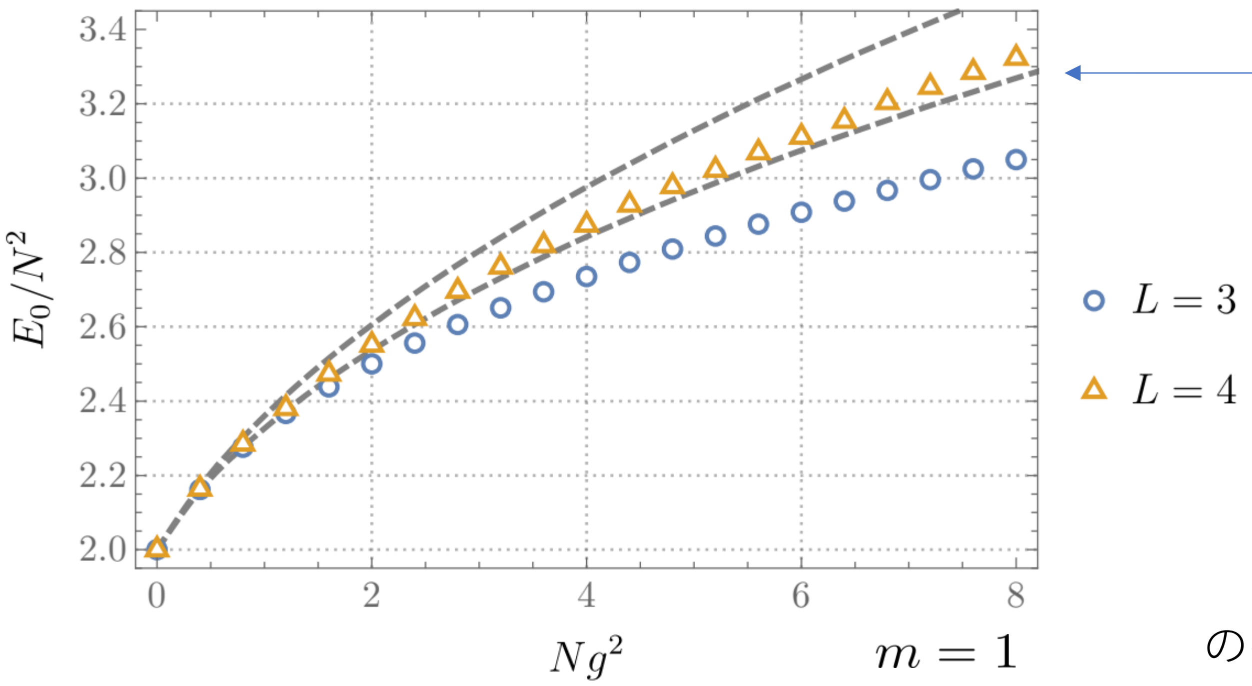
- 「長さ」がL以下の演算子でbootstrappingを行う（例えば $\mathcal{O} = X^2, XP, P^2$ は長さ２）
- Positivity constraintを満たす点のエネルギーで、最も低いものをプロットする（左図）
- 上記の最も低いエネルギーを与える点について、$\langle \mathrm{tr} X^2 \rangle$ をプロット（右図）





2-matrixモデルの結果

- $H = \mathrm{tr}\left(P_X^2 + P_Y^2 + m^2X^2 + m^2Y^2 - g^2[X,Y]^2\right)$　SO(2)回転対称性もある



適当なansatzの波動関数で評価したエネルギー
（Born-Oppenheimer wavefunction）

Yの運動項を落とした場合の基底エネルギー

$$E_0/N^2 \approx 1.40\,(Ng^2)^{1/3} + 1.01\,m^2/(Ng^2)^{1/3}$$

の振る舞い(L=4)はモンテカルロの結果と一致
[Morita-Yoshida, PRD 101, 106010 (2020)]

まとめ

- ◆ 量子力学や行列模型の解析に使えるbootstrapping法を提案した
  - ・Positivity constraint + 行列要素の間の関係式
- ◆ Large-Nでの知られた結果やモンテカルロ法の結果を再現していた