Causal connectability between quantum systems and the black hole interior in holographic duality

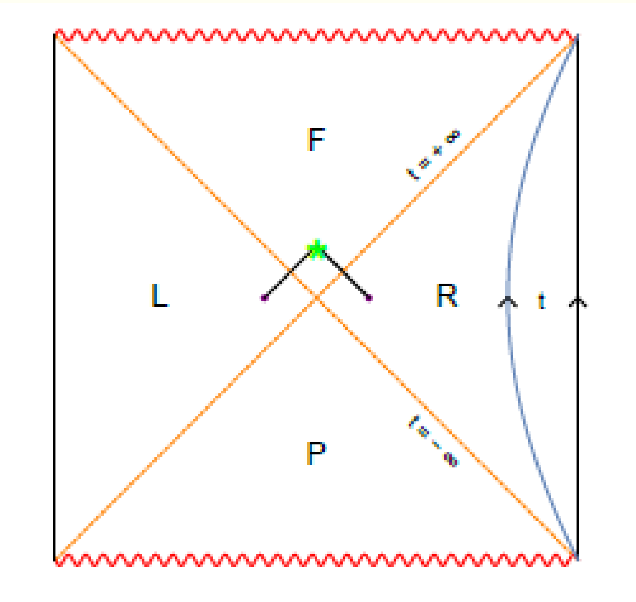
Leutheusser and Liu arXiv:2110.05497

2022/03/04 Journal Club N. Ishibashi

ゲージ・重力対応

$d+1$次元の量子重力理論 $\longleftrightarrow$ d次元のゲージ理論($N \to \infty$)

- 量子重力理論を通常の場の理論で記述できる
- ブラックホールの地平線の内側を記述できるか？
  - 無限遠の自由度はブラックホールの中の情報を持っているのか？

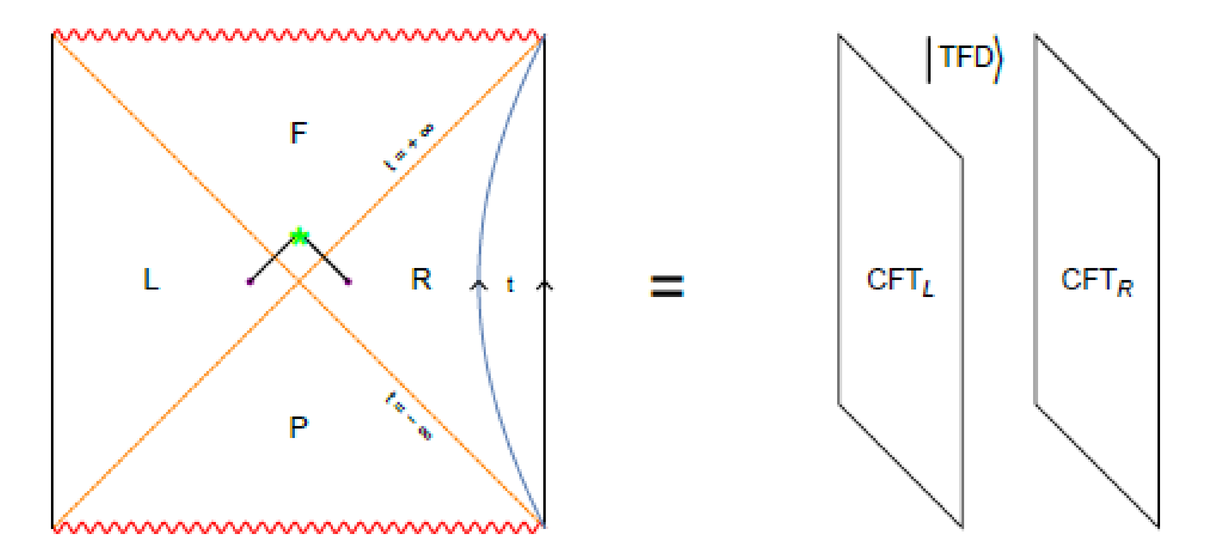


- ブラックホールに落ち込んでいく観測者(infalling observer）の時間発展演算子を作ってみよう

Outline

1. A no-go theorem
2. Fermi’s 2 atom problem
3. Type III algebra
4. Hamiltonian for an infalling observer

1． A no-go theorem



$$|\text{TFD}\rangle = \sum_i e^{-\beta E_i} |i\rangle_L |i\rangle_R$$

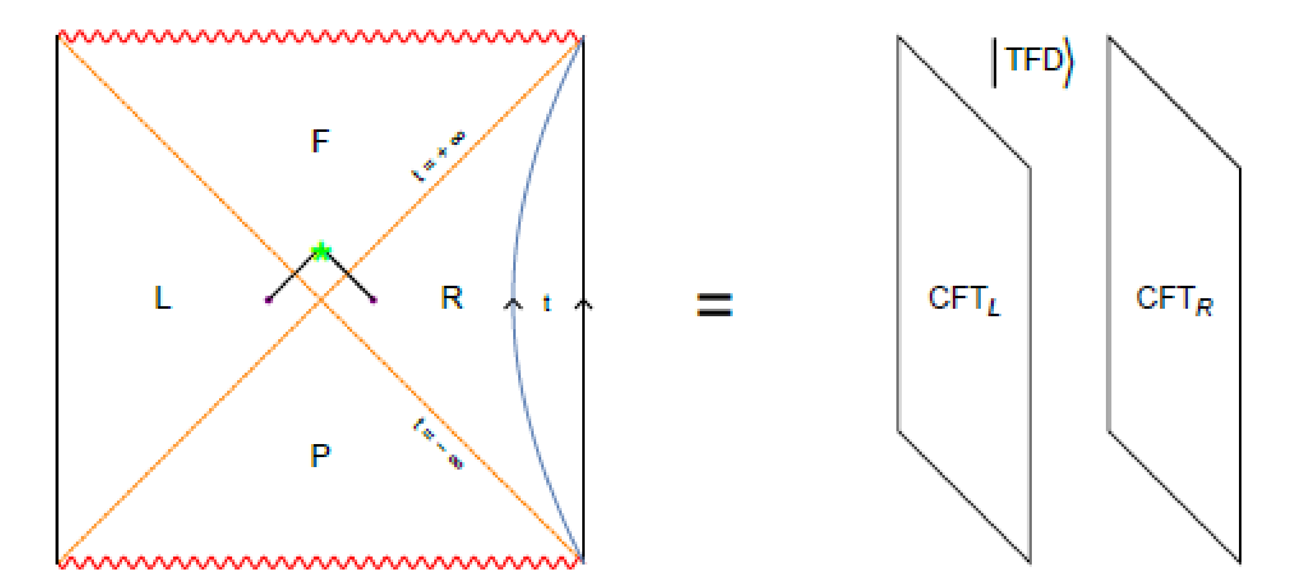
$$\beta = \frac{1}{T_{\text{H}}}$$

- 初期状態　$|\Psi_0\rangle = e^{iA_L}|\text{TFD}\rangle$
- PをRにいる観測者のmeasurement operatorとすると

$$\langle\Psi_0|P|\Psi_0\rangle = \langle\text{TFD}|e^{-iA_L} P e^{iA_L}|\text{TFD}\rangle = \langle\text{TFD}|P|\text{TFD}\rangle$$

- A_LはRにいる観測者に何の影響も及ぼさない

Infalling observerの時間発展演算子$U(s) = e^{-iGs}$



$$|\Psi_0\rangle = e^{iA_L}|\mathrm{TFD}\rangle \longrightarrow e^{-iGs}|\Psi_0\rangle$$

- 仮定
  - GはCFT$_\mathrm{R}$とCFT$_\mathrm{L}$の自由度を含む
  - Gはエルミート演算子で固有値は正

- 観測者が地平線を超える時刻をs_0とすると、$s > s_0$で演算子e^{iA_L}の存在が見えるはず

A no-go theorem

- e^{iA_L}の存在を測定する確率

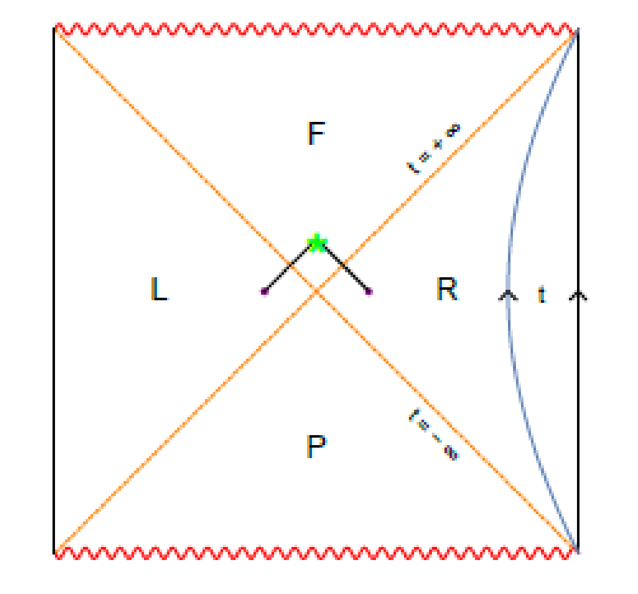
$$p(s) = \langle\Psi_0|e^{iGs}Pe^{-iGs}|\Psi_0\rangle = \langle\phi(s)|\phi(s)\rangle$$

P: e^{iA_L}を観測することに対応する射影演算子

$$|\phi(s)\rangle = Pe^{-iGs}|\Psi_0\rangle$$

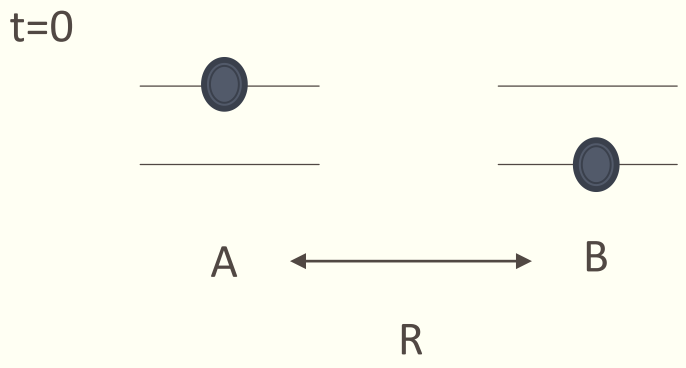
$$P^\dagger = P$$
$$P^2 = P$$

- 観測者が地平線を超える時刻をs_0とすると、
  - $s < s_0$で$p(s) = 0$
  - $s > s_0$で$p(s) \neq 0$



- これは不可能
  - Gの固有値が正なので、$|\phi(s)\rangle$はsの下半平面でsの解析関数
  - $s < s_0$で $|\phi(s)\rangle = 0$ ならば、すべてのsについて$|\phi(s)\rangle = 0$ 、よって$p(s) = 0$

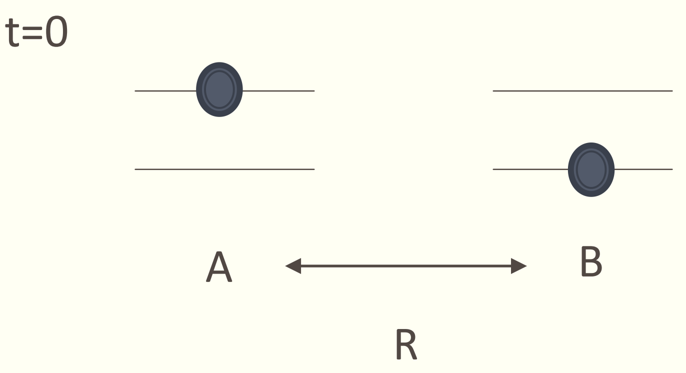
2．Fermi’s 2 atom problem



- 時刻tで原子Bが励起状態にいる確率$p(t)$を求めよ（Fermi 1932）
  - $t < \frac{R}{c}$で、$p(t) = 0$
  - $t > \frac{R}{c}$で、$p(t) \neq 0$
- この計算は正しくないのではないか？（Shirokov 1967）

$$\int_0^\infty dE_\gamma \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty dE_\gamma$$

“Nothing can happen for the first time”



$|\psi_0\rangle$

- 時刻tで原子Bが励起状態にいる確率

$$p(t) = \langle\psi_0|e^{iHt}Pe^{-iHt}|\psi_0\rangle = \langle\phi(t)|\phi(t)\rangle$$

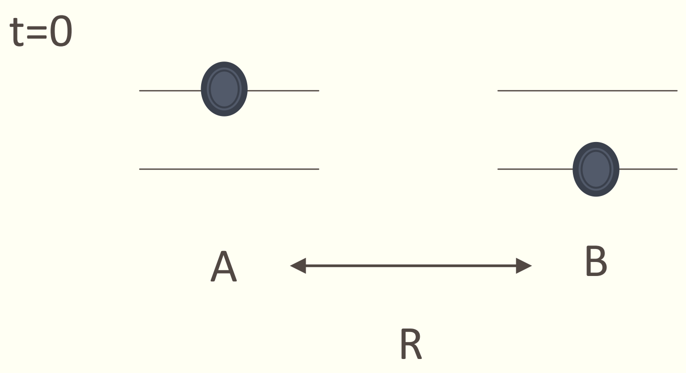
$$\begin{aligned} P &= |1\rangle\langle 1| \\ p(t) &= |\langle 1|e^{-iHt}|\psi_0\rangle|^2 \end{aligned}$$

P: 原子Bが励起状態にいることを観測することに対応する射影演算子

$$|\phi(t)\rangle = Pe^{-iHt}|\Psi_0\rangle$$

- $t < \frac{R}{c}$で、$p(t) = 0$ならば、$p(t) = 0$（Hegerfeldt 1994)

3． Type III algebra



$$p(t) = \langle\psi_0|e^{iHt}Pe^{-iHt}|\psi_0\rangle$$

P: 原子Bが励起状態にいることを観測することに対応する射影演算子

- 因果律を議論するためには、場の量子論を使う必要がある
- PはBの近傍の局所演算子を用いて作られなければならない
- 場の量子論では
  - 領域 $\mathcal{O}$ に含まれる局所演算子のなす代数 $\mathcal{M}(\mathcal{O})$はType III algebra（に分解できる）
  - Type III algebraはPのような射影演算子を含んでいない（Buchholz-Yngvason 1994）
    - Type III algebraに対応する状態はすべてmixed state
    - $P|\Omega\rangle = 0 \longrightarrow P = 0$

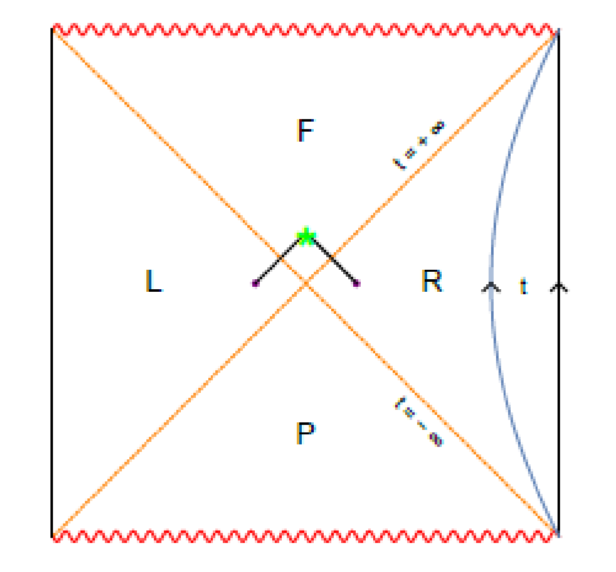
演算子代数の分類

- Type I
    - ヒルベルト空間に作用する有界演算子の代数として実現できる
    - Trが定義できる
    - 行列のなす代数、量子力学、場の量子論（時空全体）…

$$\mathrm{Tr}A = \sum_i \langle i|A|i\rangle$$

- Type II
    - Trが定義できる
- Type III
    - 状態はすべてmixed state
    - Trが定義できない
    - ある領域に含まれる場の量子論の局所演算子、無限体積の量子統計力学…

4． Hamiltonian for an infalling observer



$$p(s) = \langle \Psi_0 | e^{iGs} P e^{-iGs} | \Psi_0 \rangle$$

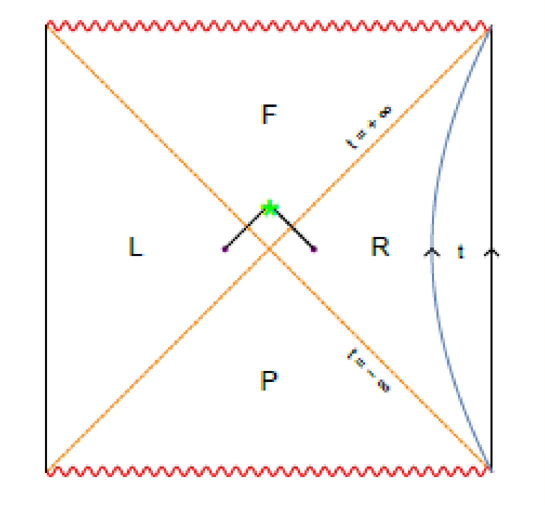
P: e^{iA_L}を観測することに対応する射影演算子

- Pは$\mathrm{CFT_R}$の演算子から作られるなければならない
- no go定理が成り立たないためには、$\mathrm{CFT_R}$, の演算子のなす代数はType IIIでなければならない

$N \to \infty$

- $N \to \infty$で$\mathrm{CFT_{L,R}}$のsingle trace operatorsはbulkの自由場に対応する
- いくつかの仮定の下に、Hamiltonian Gを大体決めることができる
  Leutheusser and Liu arXiv:2112.12156

$N \to \infty$でType IIIになるのか？



- 有限温度の場合、$V \to \infty$でType IIIになる
  - Trが定義できると、order parameterの期待値はTの解析関数になる
- $N \to \infty$でType IIIになるのではないか？（Witten:Why Does Quantum Field Theory In Curved Spacetime Make Sense?）
  - 相転移が起こる
- $\frac{1}{N}$ correctionを入れると、Type IIになる（Witten:Gravity and the Crossed Product）