Homotopy Transfer and Effective Field Theory I: Tree-level

Alex S. Arvanitakis, Olaf Hohm, Chris Hull and Victor Lekeu
arXiv:2007.07942[hep-th], [iNSPIRE].

2022/1/28　文献紹介 安藤雄史

ホモトピー構造と場の理論

近年ホモトピー構造を持つ場の理論が注目されている。
この構造は時空の対称性などに起因するものではないため有効理論がホモトピー構造を保つかどうかは自明ではない。

ホモトピー構造を持つ場の理論

$\Downarrow$ 余分な自由度を積分

ホモトピー構造を持つ/持たない場の理論

いくつかの理論に対してはホモトピー構造が保たれることが確認されている。
(Sen '16, Koyama,Okawa,Suzuki '20, Erbin,Maccaferri,Schnabl,Vošmera'20)
$\Rightarrow$ 一般に L_∞ 構造を持つ場の理論から得られる有効理論は
L_∞ 構造を持つことを示した。

Lie 代数

ベクトル空間 X の反対称な双線形写像 $[\cdot,\cdot]: X \times X \to X$ が
Jacobi 恒等式を満たす時 $(X, [\cdot,\cdot])$ を Lie 代数と呼ぶ。

$$[T_{a_1}, T_{a_2}] = C^b_{a_1 a_2} T_b \qquad \deg(T_a) = \deg([\cdot,\cdot]) = 0$$

$$\Downarrow$$

ベクトル空間 X の次数付き完全対称な双線形写像 $b_2 : S^n X \to S^{n-1} X$ が
冪零性を持つ時 (X, b_2) を Lie 代数と呼ぶ。

$$b_2(T_{a_1}, T_{a_2}) = C^b_{a_1 a_2} T_b \qquad \deg(T_a) = 1, \quad \deg(b_2) = -1$$

ex) $n = 3$

$$\begin{aligned} b_2 : T_{a_1} \wedge T_{a_2} \wedge T_{a_3} \mapsto b_2(T_{a_1}, T_{a_2}) \wedge T_{a_3} - b_2(T_{a_1}, T_{a_3}) \wedge T_{a_2} \\ + b_2(T_{a_2}, T_{a_3}) \wedge T_{a_1} \end{aligned}$$

b_2 が冪零性を持つことは Jacobi 恒等式を満たすことに等しい。

L_∞ 代数

ベクトル空間 X の次数付き完全対称な多重線形写像

$$b_k : S^n X \to S^{n-k+1} X$$
$$b_k(T_{a_1}, \ldots, T_{a_k}) = C^b_{a_1 \ldots a_k} T_b, \quad \deg(b_k) = -1$$

$$D = b_1 + b_2 + \ldots$$

D が冪零性を持つ時 (X, D) を L_∞ 代数と呼ぶ。

$D^2 T_a = 0 \iff \quad b_1^2 = 0 \Rightarrow b_1$ は冪零性を持つ微分になる。

$D^2(T_a \wedge T_b) = 0 \iff \quad b_1 b_2 + b_2 b_1 = 0 \Rightarrow b_1$ は b_2 に対して Leibniz 則を満たす。

$b_2^2 + b_1 b_3 + b_3 b_1 = 0 \Rightarrow$ Jacobi 恒等式の一般化

$$\vdots$$

dual picture

L_∞ 代数の定義されるベクトル空間の双対空間

$$S(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k X \ni T_{a_1} \wedge \cdots \wedge T_{a_k}$$

$$\Updownarrow \langle z^a, T_b \rangle = \delta^a_b$$

$$S^\star(X) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k X^\star \ni z^{a_1} \dots z^{a_k}$$

双対な形式

$$b_n^* : X^\star \to S^n X^\star; z^a \mapsto \frac{1}{n!} C^a{}_{b_1 \dots b_n} z^{b_1} \dots z^{b_n}$$

$$b_n^* = \frac{1}{n!} C^a{}_{b_1 \dots b_n} z^{b_1} \dots z^{b_n} \frac{\partial}{\partial z^a}, \quad \deg(b_k^*) = 1$$

z^a の冪級数で構成される $S^\star(X)$ の冪零性を持つ微分 Q

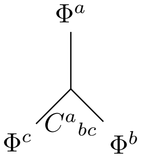
$$Q \coloneqq \partial^\star + b_2^* + \dots$$

$$D^2 = 0 \iff Q^2 = 0$$

L_∞ 構造のある場の理論

$$S=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\omega_{ab_1}C^{a}{}_{b_2\dots b_n}\Phi^{b_1}\dots\Phi^{b_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\omega_{ab_1}\Phi^{a}b_n^{*}(\Phi^{b_1})$$

$$\text{E.O.M.}:Q\Phi^a=\partial^\star\Phi^a+b_2^*(\Phi^a)+\cdots=0$$



$$\Phi^1=\phi,\Phi^2=A_\mu,\Phi^3=\psi$$

$$C^1{}_{23}=\lambda,\quad C^1{}_{11}=g$$

$$\to\lambda\phi A_\mu\psi,\quad g\phi^3$$

構造定数が相互作用を決める。

$$\dots\xleftarrow{\partial^\star}X_1^\star\xleftarrow{\partial^\star}X_0^\star\xleftarrow{\partial^\star}X_{-1}^\star\xleftarrow{\partial^\star}\cdots\ni\Phi^a$$

ホモロジーを経由した S-行列の計算や古典的な等価性が議論されている。
(Arvanitakis '19, Macrelli-Säemann-Wolf '19)

ex)ϕ^3 理論

$$
\begin{array}{ccc}
X_0^\star & \xleftarrow{\partial^\star, b_2^*} & X_{-1}^\star \\
\Cup & & \Cup \\
\phi(x) & & \psi(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\phi_a C^a{}_b \phi^b + \frac{1}{3!}\phi_a C^a{}_{bc}\phi^b\phi^c \\
&= \int d^4x d^4y \, \frac{1}{2}\phi(x)\delta^4(x-y)(\Box + m^2)\phi(y) \\
&\quad + \int d^4x d^4y d^4z \, \frac{1}{3!}\phi(x)\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)\phi(y)\phi(z)
\end{aligned}
$$

$$
\partial^\star\psi(x) = (\Box + m^2)\phi(x) \qquad b_2^*(\psi(x)) = \int d^4y d^4z \, \delta^4(x-y)\delta^4(x-z)\phi(y)\phi(z)
$$

$$
\partial^\star\phi(x) = 0 \qquad b_2^*(\phi(x)) = 0
$$

$$
S = \frac{1}{2}\omega(\phi, \partial^\star\psi) + \frac{1}{3!}\omega(\phi, b_2^*(\psi))
$$

$$
Q\Phi^a = 0 \iff \begin{cases} Q\psi = (\Box + m^2)\phi + \phi^2 = 0 \\ Q\phi = 0 \end{cases}
$$

L_∞ 構造のある場の理論

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \omega_{ab_1} C^{a}{}_{b_2 \dots b_n} \Phi^{b_1} \dots \Phi^{b_n} \\
\Rightarrow S_{\mathrm{eff}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{\omega}_{\bar{a}\bar{b}_1} C^{\bar{a}}{}_{\bar{b}_2 \dots \bar{b}_n} \bar{\Phi}^{\bar{b}_1} \dots \bar{\Phi}^{\bar{b}_n}
\end{aligned}
$$

1. L_∞ morphism を構成する。

$$E^\star Q = \bar{Q} E^\star$$

$$
\begin{array}{cccc}
E^\star : & S^\star(X) & \to & S^\star(\bar{X}) \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & \Phi^a & \mapsto & \bar{\Phi}^{\bar{a}}
\end{array}
$$

2. morphism が物理的に余分な自由度を積分していることを示す

有効理論

$$\iota^\star \Phi^a = \iota^a_{\bar{a}} \bar{\Phi}^{\bar{a}}, \quad p^\star \bar{\Phi}^{\bar{a}} = p^{\bar{a}}_a \Phi^a$$

$$\begin{tikzcd}
\Phi^a \in \dots & X^\star_1 \arrow[l, "\partial^\star"'] \arrow[d, bend right, "\iota^\star"'] & X^\star_0 \arrow[l, "\partial^\star"'] \arrow[d, bend right, "\iota^\star"'] & X^\star_{-1} \arrow[l, "\partial^\star"'] \arrow[d, bend right, "\iota^\star"'] & \dots \arrow[l, "\partial^\star"'] \\
\bar{\Phi}^{\bar{a}} \in \dots & \bar{X}^\star_1 \arrow[l, "\bar{\partial}^*"'] \arrow[u, bend right, "p^\star"'] & \bar{X}^\star_0 \arrow[l, "\bar{\partial}^*"'] \arrow[u, bend right, "p^\star"'] & \bar{X}^\star_{-1} \arrow[l, "\bar{\partial}^*"'] \arrow[u, bend right, "p^\star"'] & \dots \arrow[l, "\bar{\partial}^*"']
\end{tikzcd}$$

ホモロジーが同型

$$\iota^\star p^\star = \mathrm{id}_{\bar{X}^\star}, \quad p^\star \iota^\star = \mathrm{id}_{X^\star} + \partial^\star h^\star + h^\star \partial^\star$$

side condition

$$h^\star p^\star = \iota^\star h^\star = (h^\star)^2 = 0$$

$X^\star$ が直和分解できる。

$$X^\star = \iota^\star p^\star X^\star \oplus (-\partial^\star h^\star X^\star) \oplus (-h^\star \partial^\star X^\star)$$

有効理論

$$
\begin{array}{ccccccc}
X^\star = & p^\star \iota^\star X^\star & \oplus & (-\partial^\star h^\star X^\star) & \oplus & (-h^* \partial^\star X^\star) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \iota^\star X^\star & & 0 & & \text{on-shell} \subset \iota^\star X^\star
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
E^\star(p^\star \iota^\star \Phi^a) &= \iota^\star \Phi^a \\
E^\star(\partial^\star h^\star \Phi^a) &= 0 \\
E^\star(Q h^\star \partial^\star \Phi^a) &= 0
\end{aligned}
$$

余分な自由度を積分することに対応

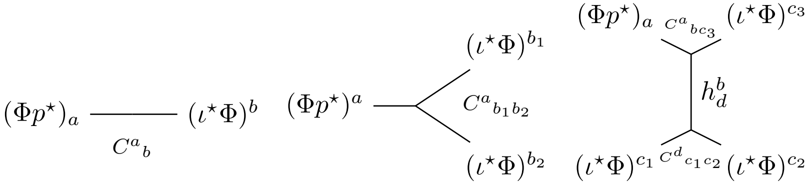
$$
\begin{aligned}
&E^\star(\Phi^a) = \iota^\star(\Phi^a) + h(Q - \partial^\star)\Phi^a \\
&\qquad \bar{Q}\bar{\Phi}^{\bar{a}} = p_a^{\bar{a}} \left(C^a{}_b(\iota^\star \Phi^b) + \frac{1}{2} C^a{}_{b_1 b_2}(\iota^\star \Phi^{b_1})(\iota^\star \Phi^{b_2}) + \frac{1}{2} C^a{}_{b c_3} h^b_d C^d{}_{c_1 c_2} + \dots \right)
\end{aligned}
$$

有効理論

$$\bar{\Phi}_{\bar{a}}\bar{\partial}\bar{\Phi}^{\bar{a}} = (\Phi p^\star)_a C^a{}_b(\iota^\star\Phi)^b$$

$$\bar{\Phi}_{\bar{a}}\bar{b}_2(\bar{\Phi}^{\bar{a}}) = (\Phi p^\star)_a \frac{1}{2} C^a{}_{b_1 b_2}(\iota^\star\Phi)^{b_1}(\iota^\star\Phi)^{b_2}$$

$$\bar{\Phi}_{\bar{a}}\bar{b}_3(\bar{\Phi}^{\bar{a}}) = (\Phi p^\star)_a \frac{1}{3!}\left(3C^a{}_{bc_3} h^b_d C^d{}_{c_1 c_2}\right)(\iota^\star\Phi)^{c_1}(\iota^\star\Phi)^{c_2}(\iota^\star\Phi)^{c_3} + \dots$$



まとめ

- L_∞ 構造を持つ場の理論に対して morphism を構成することで有効理論にも L_∞ 構造があることが示された
- Batalin-Vilkovisky 形式を経由することで多くの場の理論が L_∞ 構造を持つためこの結果は多くの理論に適用できる
- この論文の議論を利用することでより複雑な系の有効理論を構成することが可能になる
  閉弦の場の理論から Double Field Theory⇒arXiv:2106.08343
- この論文では tree レベルでしか検証できておらず、loop 補正を考慮して更に改良する必要がある

参考文献

[1] Alex S. Arvanitakis, O. Hohm, C. Hull, V. Lekeu, "Homotopy Transfer and Effective Field Theory I: Tree-level",
arXiv:2007.07942 [hep-th], [iNSPIRE].

[2] A. Sen, "Wilsonian effective action of superstring theory",
JHEP 01 (2017) 108, arXiv:1609.00459 [hep-th], [iNSPIRE].

[3] D. Koyama, Y. Okawa, N. Suzuki, "Gauge-invariant operators of open bosonic string field theory in the low-energy limit",
arXiv:2006.16710 [hep-th], [iNSPIRE].

[4] H. Erbin, C. Maccaferri, M. Schnabl, J. Vošmera, "Classical algebraic structures in string theory effective actions",
JHEP 11 (2020) 123, arXiv:2006.16270 [hep-th], [iNSPIRE].

[5] Alex S. Arvanitakis, "The L_∞-algebra of the S-matrix",
JHEP 07 (2019) 115, arXiv:1903.05643 [hep-th], [iNSPIRE].

[6] T. Macrelli, C. Sämann, M. Wolf, "Scattering amplitude recursion relations in Batalin-Vilkovisky–quantizable theories",
Phys.Rev.D 100 (2019) 4, 045017, arXiv:1903.05713 [hep-th], [iNSPIRE].

[7] Alex S. Arvanitakis, O. Hohm, C. Hull, V. Lekeu, "Homotopy Transfer and Effective Field Theory II: Strings and Double Field Theory",
arXiv:2106.08343 [hep-th], [iNSPIRE].