IKKT模型における自発的対称性の破れ

Kazma Fujimoto

1 はじめに

Sang-Woo Kim, Jun Nishimura, Asato Tsuchiya **による** “Expanding (3+1)-dimensional universe from a Lorentzian matrix model for superstring theory in (9+1)-dimensions” (arXiv:1108.1540) **のレビュー**

Lorentzian **の行列模型における** $\mathrm{SO}(9,1)$ **から** $\mathrm{SO}(3,1)$ **への自発的破れが示された**

2　行列模型

トレースレスなエルミート行列(サイズ N)を力学変数とする0次元または1次元の量子力学

large N **極限で超弦理論を非摂動論的に定式化できると期待されている**

この論文ではIIB**型に対応する行列模型である**
IKKT**模型が扱われた**

2.1 IKKT模型

次のような分配関数をもつ:

$$Z = \int \prod_{\mu} dA_{\mu} \prod_{\alpha} d\Psi_{\alpha} \exp\left(iS_{\mathrm{IKKT}}\right)$$

where

$$S_{\mathrm{IKKT}} = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_{\mu}, A_{\nu}]\,[A^{\mu}, A^{\nu}]) - \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}(\Psi_{\alpha}(\mathcal{C}\Gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\,[A_{\mu}, \Psi_{\beta}])$$

Ψ_αの積分を先に実行すると

$$Z=\int\prod_\mu dA_\mu \exp\left(-\frac{i}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu,A_\nu]\,[A^\mu,A^\nu])\right)$$
$$\times\int\prod_\alpha d\Psi_\alpha \exp\left(-\frac{i}{4g^2}\mathrm{Tr}(\Psi_\alpha(\mathcal{C}\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,[A_\mu,\psi_\beta])\right)$$
$$=\int\prod_\mu dA_\mu \exp\left(-\frac{i}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu,A_\nu]\,[A^\mu,A^\nu])\right)\mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)$$

実はLorentzianでは$\mathrm{Pf}\mathcal{M}$が実数になる

$\exp(i\cdots)$をなんとかすればrational hybrid Monte Carlo法が使える

2.2　それまでの研究

それまでのEuclidean**での研究でも、すでに** $\mathrm{SO}(10)$ **からの**SSB**が見えていた**[Nishimura (2002)]**のだが、**Euclicean **では** $\mathrm{Pf}\mathcal{M}$ **に複素位相があり、これが**SSB**の原因となっていた**

Lorentzian**と**Eucledean**とでは**SSB**のメカニズムが異なる**

2.3　Lorentzinの難しさ

計量が正定値でないので時間成分も空間成分も大きくとるような配位がありうる

$$Z = \int \prod_\mu dA_\mu \exp\left(-\frac{i}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]\,[A^\mu, A^\nu])\right)\mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)$$

に赤外カットオフをいれないと積分が
well-defined **にならない**

Euclidean **の場合にはカットオフしなくても積分値が有限**

2.4　2段階のカットオフ

これから

時間方向のカットオフ

空間方向のカットオフ

の2段階のカットオフを経て積分を定義する

2.4.1　1段階め

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2 < \kappa\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2$$

ここでκを$\kappa \approx \beta N^{1/4}$となるようにとることで、large N極限では人為的なカットオフ[*1]の影響がなくなる

---

*1　**どんなローレンツ変換に対しても$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2$が最小になるようにゲージ固定すればこのカットオフはローレンツ対称性を破らない**

時間方向のカットオフで積分は次のようになる

$$
\begin{aligned}
Z &= \int \prod_i dA_i \int dA_0 \Theta\left(\kappa \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right) \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{i}{4g^2} \mathrm{Tr}(\left[A_\mu, A_\nu\right]\left[A^\mu, A^\nu\right])\right) \mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu) \\
&= \int \prod_i dA_i \int dA_0 \Theta\left(\kappa \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right) \\
&\qquad \times \int_0^\infty dr \delta\left(\frac{1}{N} \mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - r\right) \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{i}{4g^2} \mathrm{Tr}(\left[A_\mu, A_\nu\right]\left[A^\mu, A^\nu\right])\right) \mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)
\end{aligned}
$$

次に$A_\mu \to \sqrt{r}A_\mu$とリスケールする

$$
\begin{aligned}
Z = \int_0^\infty dr \int \prod_{1\le i\le 9} dA_i \left(\sqrt{r}^{N^2-1}\right)^9 \int dA_0 \sqrt{r}^{N^2-1} \\
\times \Theta\left(\kappa \frac{r}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - \frac{r}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right) \\
\times \int_0^\infty dr\delta\left(\frac{r}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - r\right) \\
\times \exp\left(-\frac{ir^2}{4g^2}\mathrm{Tr}(\left[A_\mu, A_\nu\right]\left[A^\mu, A^\nu\right])\right)\mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)
\end{aligned}
$$

rをまとめるとZは

$$\int \prod_i dA_i \int dA_0 \mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)$$

$$\times \int_0^\infty dr \exp\left(-\frac{ir^2}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]\,[A^\mu, A^\nu])\right) r^{\frac{10}{2}\left(N^2-1\right)-1}$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - 1\right)\Theta\left(\kappa\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right)$$

となる (さらに$\Theta(\cdots)$ は$\Theta\left(\kappa - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right)$)

rの積分を実行するにあたり空間方向のカットオフをいれる

2.4.2　2段階め

$$\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,(A_i)^2 < L^2$$

すなわち $r < L^2$
ここで L を、1段階めのカットオフパラメータ $\kappa \approx \beta N^{1/4}$ における β と一緒に無限大に飛ばせば、large N 極限では人為的なカットオフの影響がなくなる

空間方向のカットオフで Z は次のようになる

$$\int \prod_i dA_i \int dA_0 \mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu)$$

$$\times \int_0^{L^2} dr \exp\left(-\frac{ir^2}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]\left[A^\mu, A^\nu\right])\right) r^{\frac{10}{2}\left(N^2-1\right)-1}$$

$$\times \delta\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_i\right)^2 - 1\right)\Theta\left(\kappa - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\left(A_0\right)^2\right)$$

赤字の部分は $-\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]\left[A^\mu, A^\nu\right])$ **の関数になっている**

実は、この積分を実行*2 すると、引数がゼロのときに鋭いピークを持つ実関数 f になる

$$
\begin{aligned}
Z = \int \prod_i dA_i \int dA_0 \mathrm{Pf}\mathcal{M}(A_\mu) \\
\times f\left(-\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}([A_\mu, A_\nu]\,[A^\mu, A^\nu])\right) \\
\times \delta\left(\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,(A_i)^2 - 1\right)\Theta\left(\kappa - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\,(A_0)^2\right)
\end{aligned}
$$

---

*2　積分を実行する際には $\exp(\cdots)$ の引数に収束因子 $1-|\epsilon|$ を乗じて計算し、後から $\epsilon \to 0$ にする

以上で、LorentzianのIKKT模型における、複素位相のある分配関数をratonal hybrid Monte Carlo法で計算できるようになった[*3]

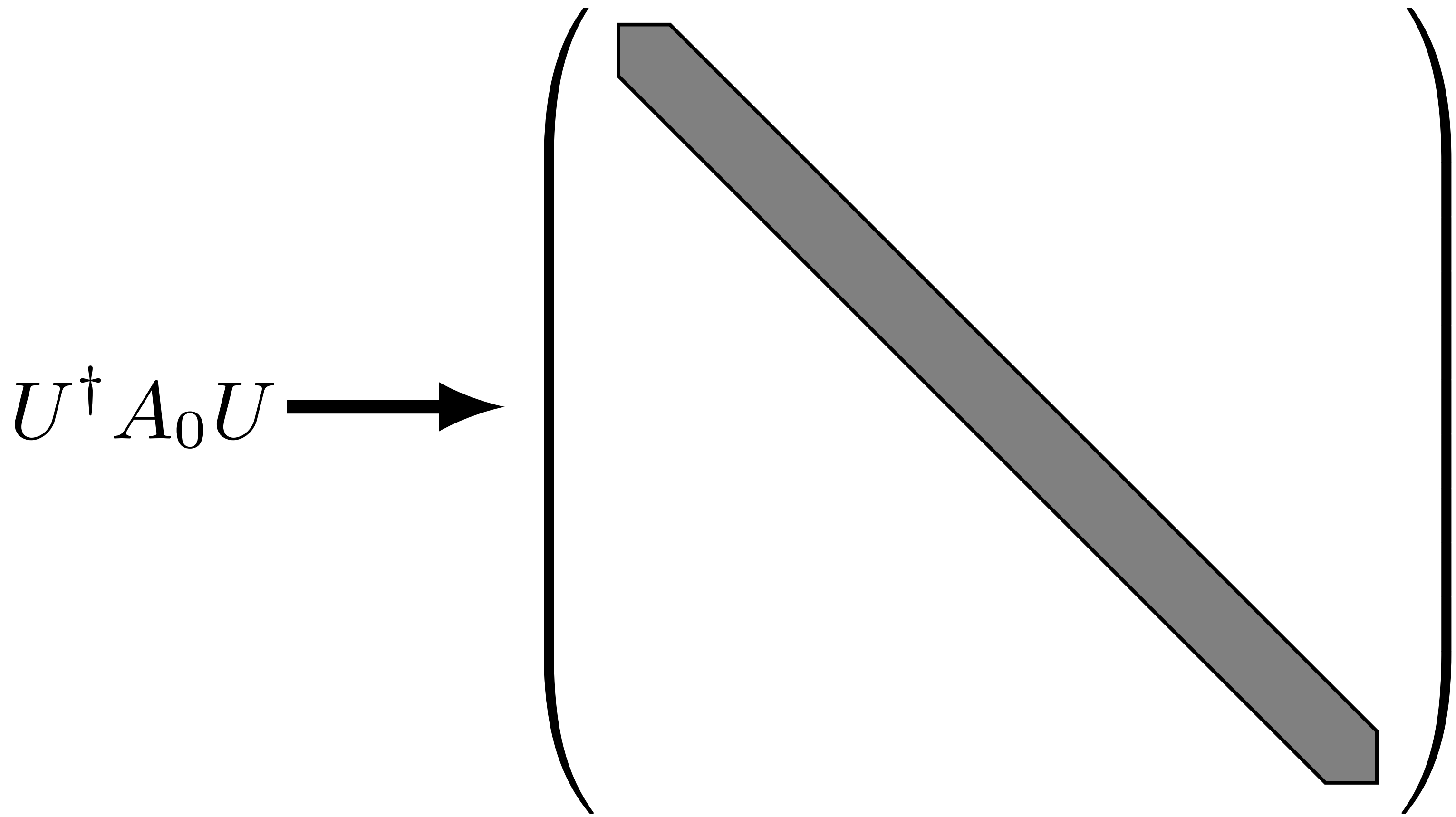
[*3] カラクリは2段階のカットオフを入れて、空間方向の大きさrで先に積分を実行してしまうところにある

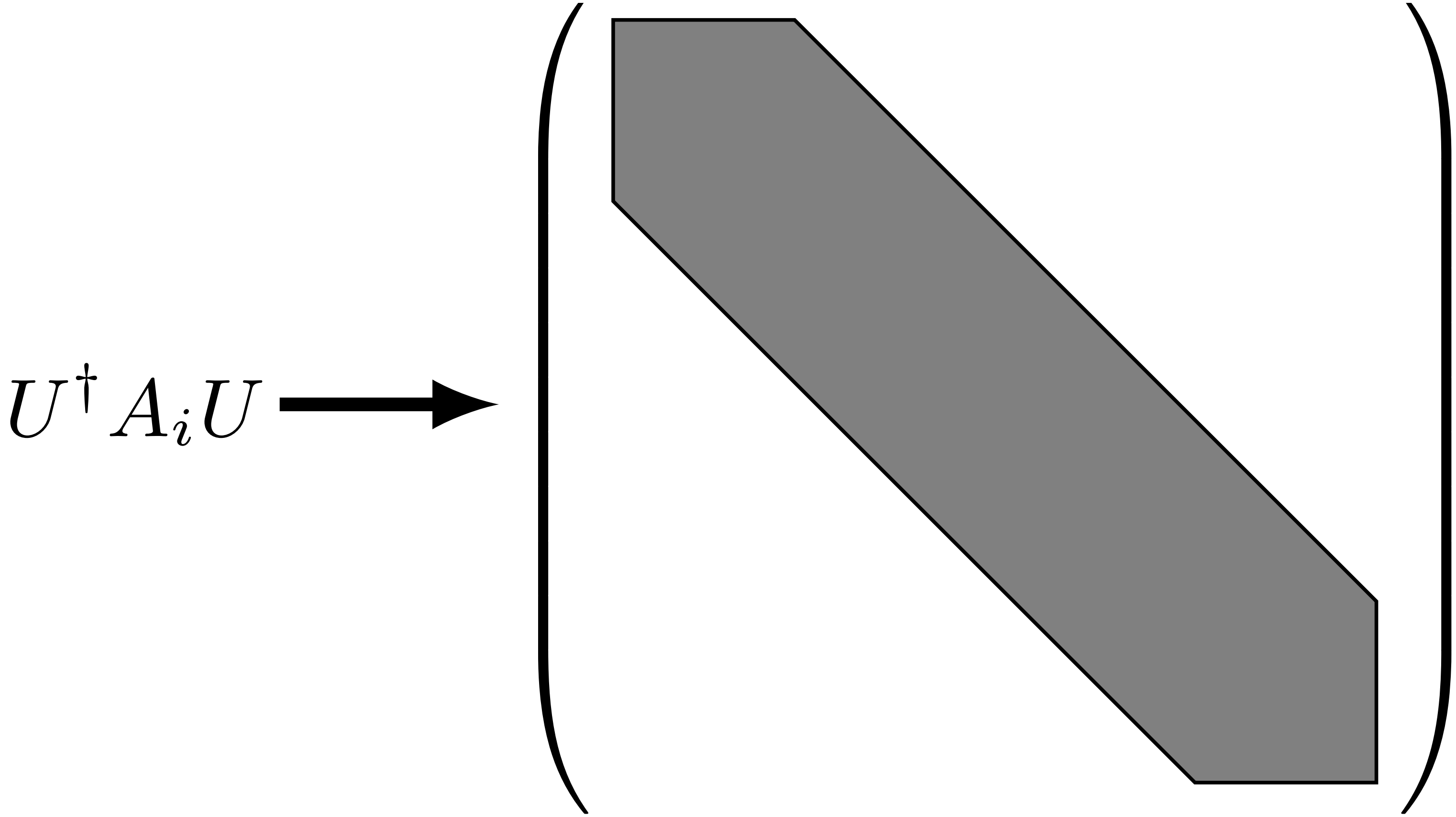
2.5　時間発展の見方

以上のような方法で作ったウェイトで配位を生成しても、IKKT 模型の場合、ただちに時間発展が分かるわけではない

$$S_{\mathrm{IKKT}} = -\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left([A_\mu, A_\nu]\,[A^\mu, A^\nu]\right)$$
$$-\frac{1}{4g^2}\mathrm{Tr}\left(\Psi_\alpha(\mathcal{C}\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\,[A_\mu, \psi_\beta]\right)$$

時間発展をパラメトライズする “時刻” を得るには A_0 を対角化すればよい


$U^\dagger A_0 U$


$U^\dagger A_i U$

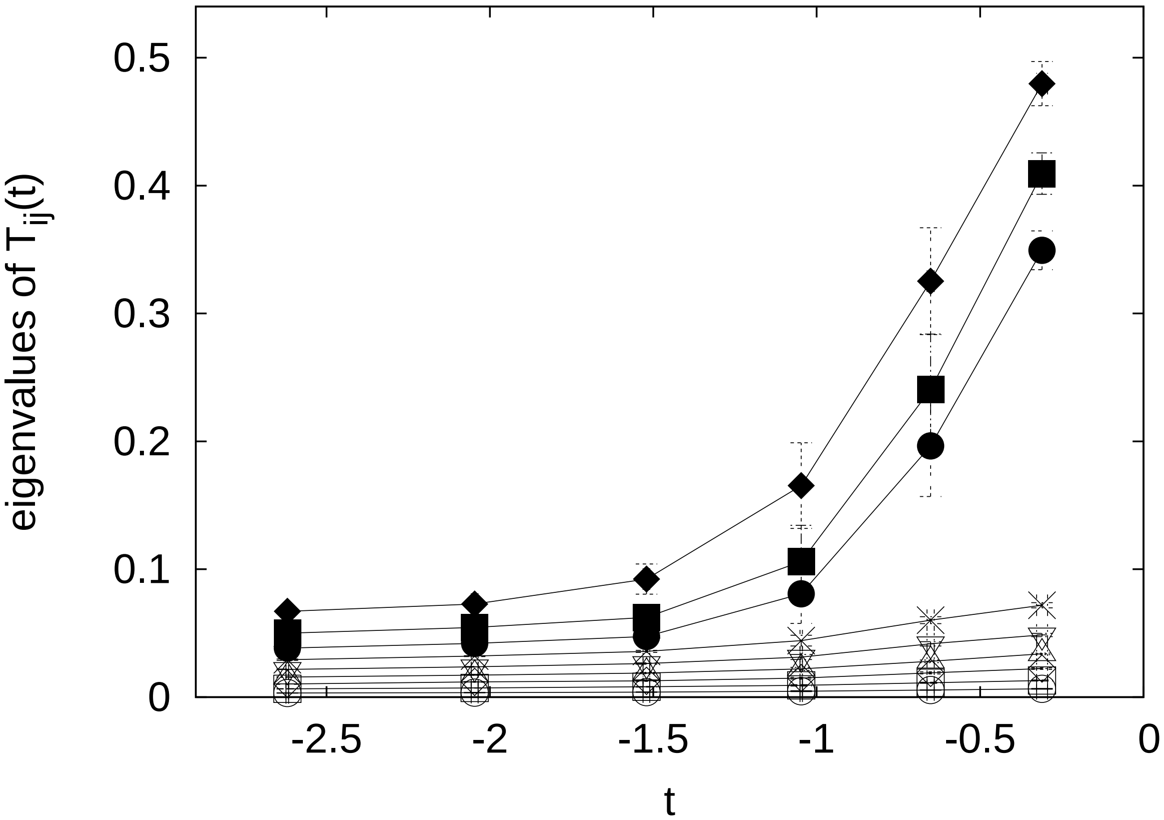
時空間が非可換なので A_μ たちを同時対角化できない

この A_i の帯に沿って左上から部分正方行列 $\tilde{A}_i(t)$ を切り出していけば、各空間方向の行列の時間発展が分かる

3　結果

あらかじめ決めておいた空間の各方向 $i (\in \{1, \ldots, 9\})$ のいずれかが膨張する 3 次元に対応するとは限らない(空間回転の任意性がある)ので $\mathrm{Tr}\left(\tilde{A}_i(t)\tilde{A}_j(t)\right)$ の固有値分布をみる

その固有値分布は各空間方向に沿って次のようになっていた



9つのうち3つだけが膨張している

4　残された問題

行列のヒルベルトシュミットノルムから空間の拡がりを捉えたため、行列要素の分布の情報が失われている

実際には、膨張している空間方向の行列は

$$1 \oplus \rho\sigma_i \ (i = 1, 2, 3)$$

の形状をしており、この $\rho(t)$ が大きくなっているに過ぎない

そのような配位が3次元空間の創発を表していると、本当に言えるだろうか？

$\rightarrow$別な方法で配位を生成したい