

# Naive staggered fermionを用いた $N_f=4$ における有限温度QCD相転移の研究

羅梟 2021/10/29

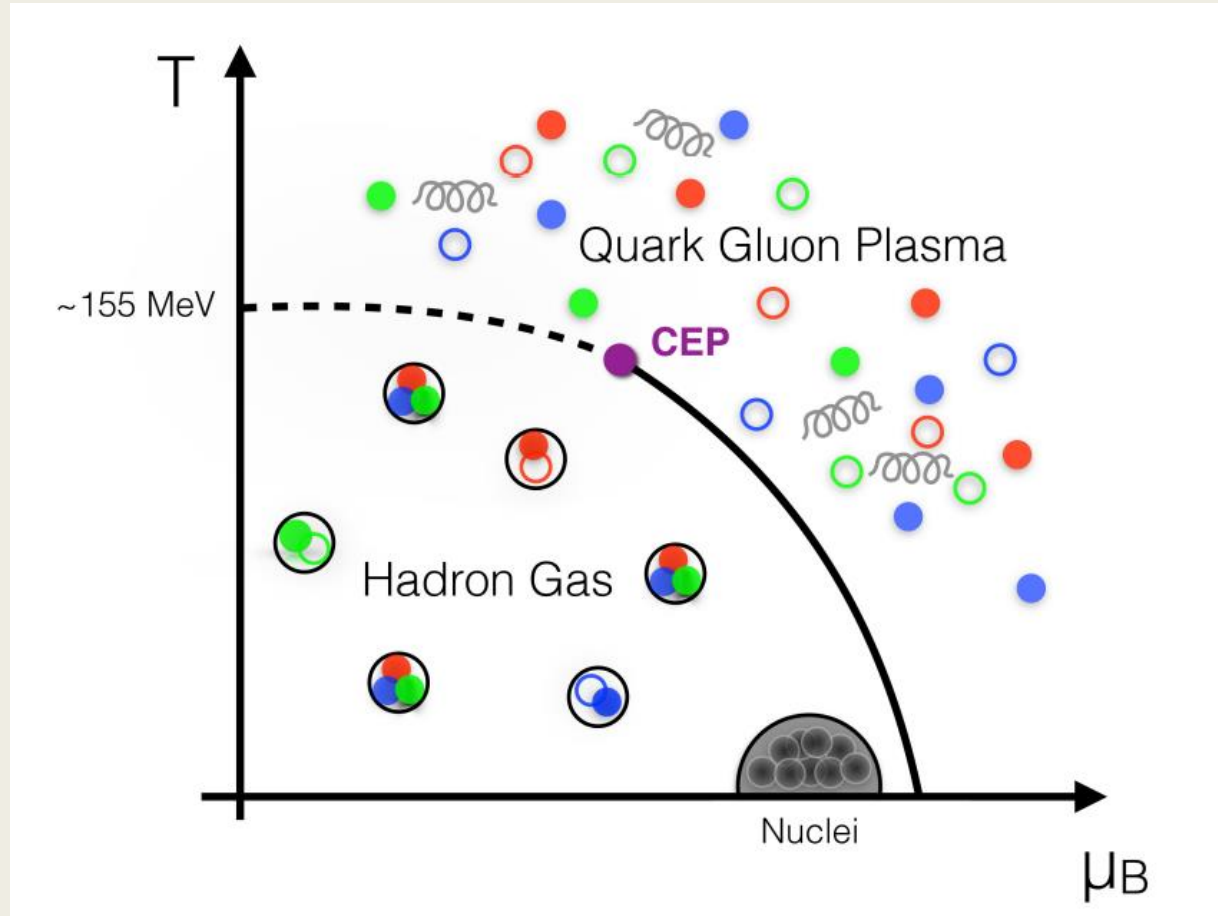
# Contents

- 研究目的
- 導入：QCD相図、Columbia plot
- 用いられる作用
- 観測量及び演算子の構成
- データ解析の手法
- 現時点での結果
- 参考文献

# 研究目的

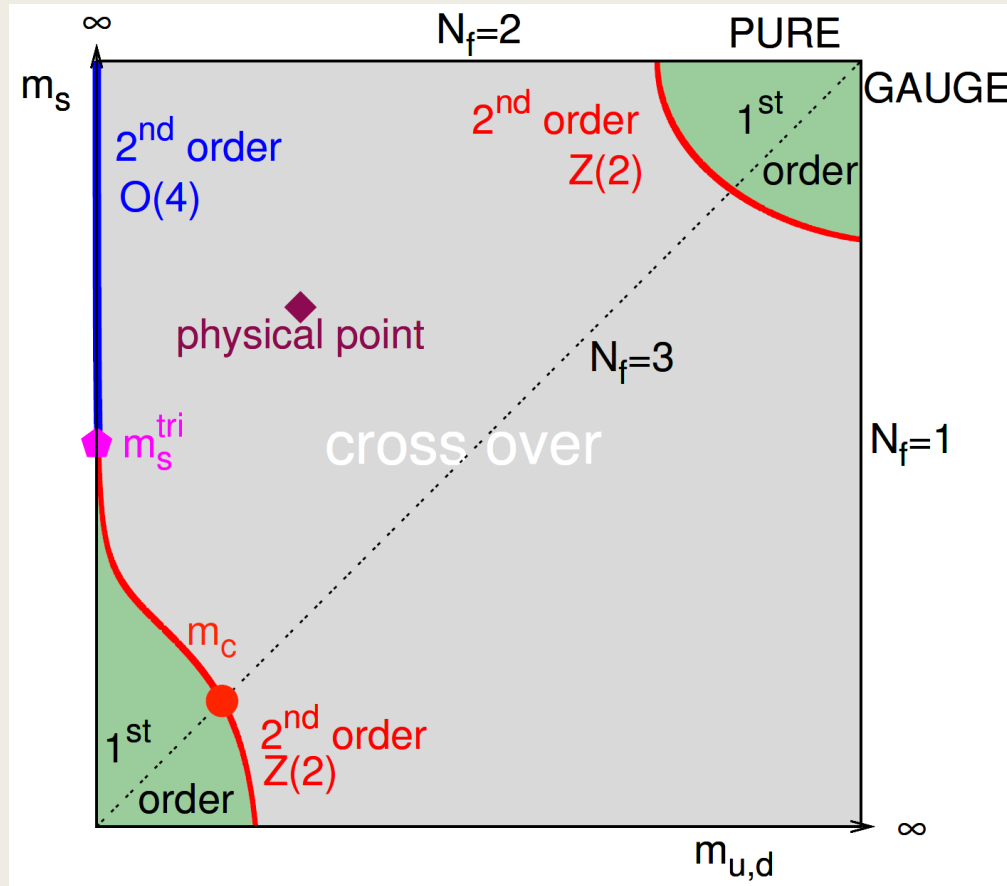
- Staggered fermion、 $N_t=10$ での相転移の振る舞いを確認し、CEPを探し出す
- 連続極限でのCEPの位置の決定
- Wilson fermionの結果と比べる

# 導入：QCD相図



- 境界面の上：Quark Gluon Plasma, quarkとgluonが自由に存在する相
- 境界面の下：quarkとgluonが強い相互作用により束縛される相
- 点線：Crossover line
$$\frac{T_c(\mu)}{T_c(0)} = 1 - \kappa(N_f, m_f) \left(\frac{\mu}{T}\right)^2 + \dots$$
- 実線：一次転移の境界面
- CEP：Critical end point, 一次相転移の終点。CEPで二次相転移が起きる（現時点まで発見されていない）

# 導入：Columbia plot ( $N_f=2+1$ )

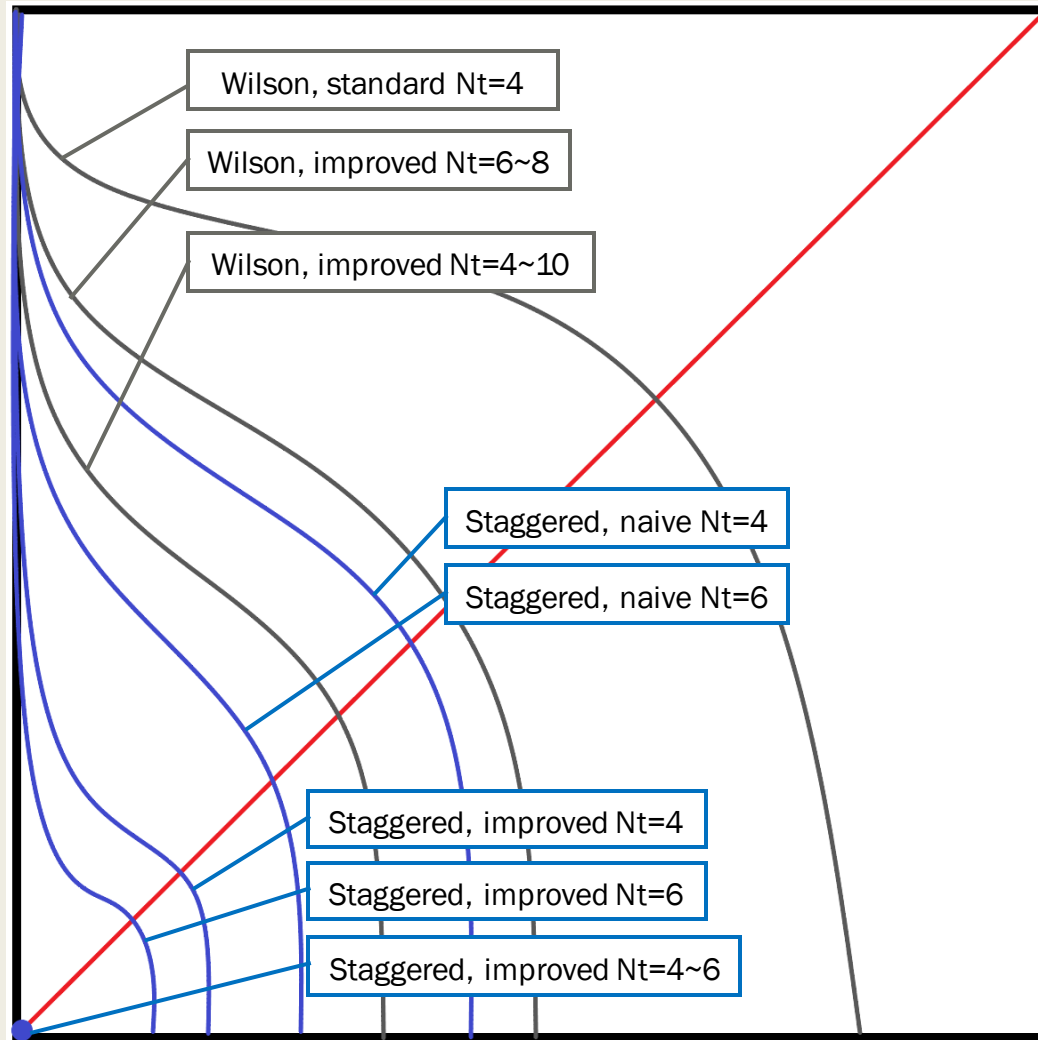


Owe Philipsen, Acta Phys.Polon.Supp. 5 (2012) 825-835

- 右上：重いクォーク, pure gauge
- 左下：軽いクォーク
- 緑の領域：一次転移
- 灰色の領域：cross over, 転移点（相転移が起きる訳ではないが、感受率が最大となる場所、pseudo critical pointとも呼ばれる）で解析的
- 赤い線：境界面, 二次転移が起きる
- Physical point :  $m_u \approx m_d < m_s$
- $m_c$  : CEP (臨界終点でのクォーク質量)

$N_f=a+b$  : a個縮退質量 $m_a$ のクォーク+b個縮退質量 $m_a$ のクォーク

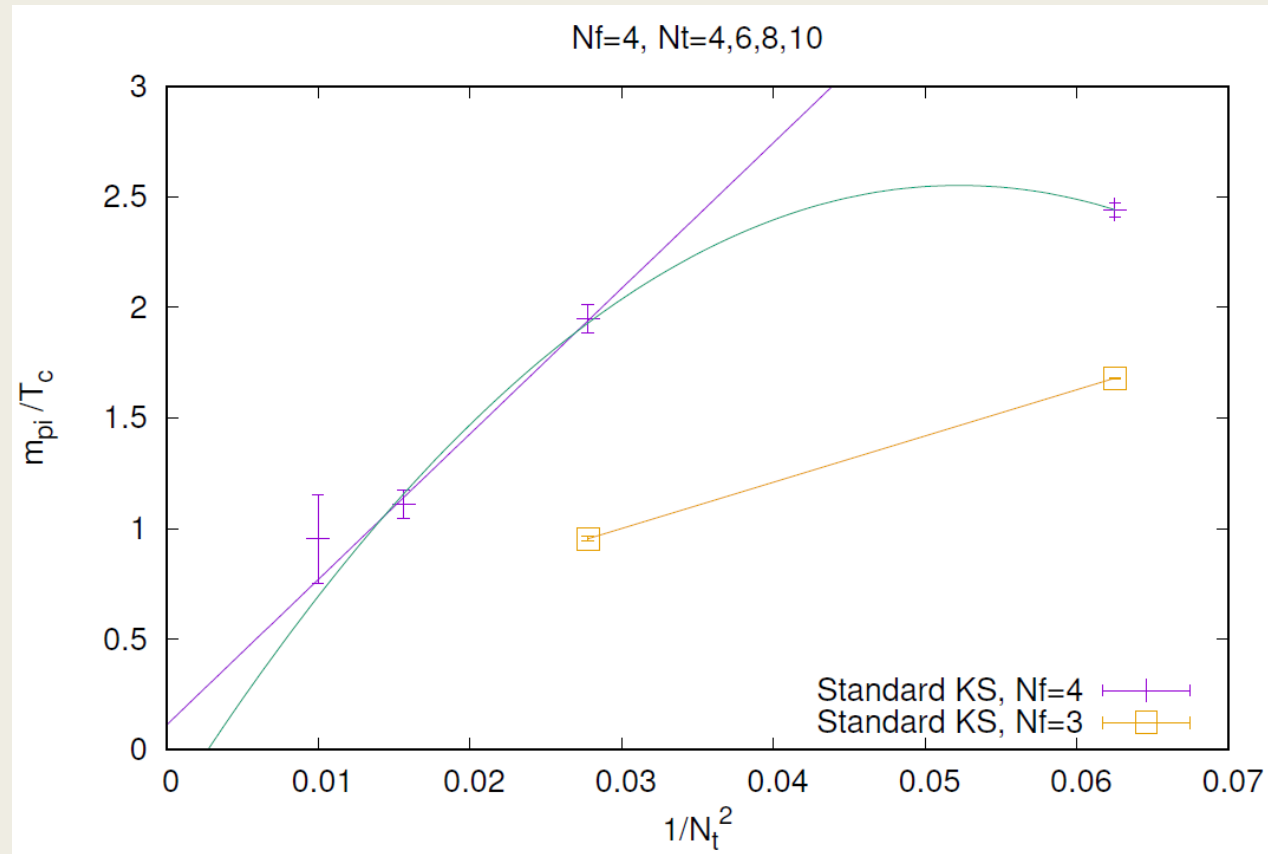
# 導入 : Columbia plot ( $N_f=2+1$ )



- 三重点  $m_s^{\text{tri}}$  の存在 : 量子異常、 $U_A(1)$  対称性の破れに関わる
- 連続極限に近づくと軽いクオークの一次転移の領域が縮むことが知られている
  - ただし、 $N_f=3$ においてWilsonとStaggered fermionの結果に大きな差がある
  - $N_f < 4$ のとき、Staggered fermionの計算には、Dirac行列のトレースに対してrootをするという非自明な操作があるだと推測している

➔ rootの計算のない $N_f=4$ 、naive staggered fermionでの連続極限を確かめる

# $N_f=4$ と $N_f=3$ の naive staggered fermion の比較



$m_{\text{pi}}/T_c$  :  $m_c$  の大きさに対応  
 $1/N_t^2$  : 0 になると連続極限

- 同じ  $N_t$  に対して、  
 $m_c(N_f=4) > m_c(N_f=3)$
- クォーク質量の大きい方が  
計算コストが低い
- 妥当性の知らない root を計算  
しなくて済む

# 作用

- 用いられる作用 : Naive staggered fermions + plaquette gauge action

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \{ \eta_\mu(n) [\bar{\chi}(n) U_{n,\mu} \chi(n + \hat{\mu}) - \bar{\chi}(n + \mu) U_{n,\mu}^\dagger \chi(n)] + m \bar{\chi}(n) \chi(n) \} \quad (1)$$

$$\eta_\mu(n) = (-1)^{n_1 + n_2 + \dots + n_{\mu-1}} \quad (2)$$

$$S_G = -\beta \sum_i P_i = -\beta \sum_{n,\mu\nu} \text{Tr} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \quad (3)$$



# 観測量及び演算子の構成

- 分配関数と任意の観測量  $\hat{O}$  の  $n$  次モーメントはそれぞれ

$$Z(m, \beta) = \int \mathcal{D}U \prod_{f=1}^{N_f} \det D_f[U; m_f] e^{-\hat{S}_G[U; \beta]} \quad (3)$$

$$\langle \hat{O}^n \rangle = -\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \log Z \quad (4)$$

で表される。パラメータは質量  $m$  及び逆結合定数  $\beta$  である

- 観測量  $\hat{O}$  の平均値  $\mu_{\hat{O}}$ 、感受率  $\chi_{\hat{O}}$ 、歪度  $S_{\hat{O}}$ 、尖度  $K_{\hat{O}}$  はそれぞれ 1~4 次キュムラントによって定義される

$$\log \langle \exp(x\hat{O}) \rangle = \sum_n \frac{x^n}{n!} \kappa_n \quad (5)$$

$$\mu_{\hat{O}} = \kappa_1 / V \quad (6)$$

$$\chi_{\hat{O}} = \kappa_2 / V \quad (7)$$

$$S_{\hat{O}} = \kappa_3 / \kappa_2^{3/2} \quad (8)$$

$$K_{\hat{O}} = \kappa_4 / \kappa_2^2 \quad (9)$$

# 観測量及び演算子の構成

- 1~4次キュムラントは

$$\kappa_1 = \langle Q_1 \rangle \quad (10)$$

$$\kappa_2 = \langle Q_2 \rangle \quad (11)$$

$$\kappa_3 = \langle Q_3 \rangle - 3\langle Q_2 \rangle \langle Q_1 \rangle + 2\langle Q_1 \rangle^3 \quad (12)$$

$$\kappa_4 = \langle Q_4 \rangle - 4\langle Q_3 \rangle \langle Q_1 \rangle - 3\langle Q_2 \rangle^2 + 12\langle Q_2 \rangle \langle Q_1 \rangle^2 - 6\langle Q_1 \rangle^4 \quad (13)$$

- $Q_1 \sim Q_4$ は $\hat{O}$ の1次~4次モーメントである

- Plaquette:  $Q_1 = \langle P \rangle, Q_2 = \langle P^2 \rangle, Q_3 = \langle P^3 \rangle, Q_4 = \langle P^4 \rangle$

- Chiral condensate:

$$Q_1 = N_f \text{Tr} D^{-1}$$

$$Q_2 = -N_f \text{Tr} D^{-2} + (\text{Tr} D^{-1})^2$$

$$Q_3 = 2N_f \text{Tr} D^{-3} - 3N_f^2 \text{Tr} D^{-2} \text{Tr} D^{-1} + (\text{Tr} D^{-1})^3$$

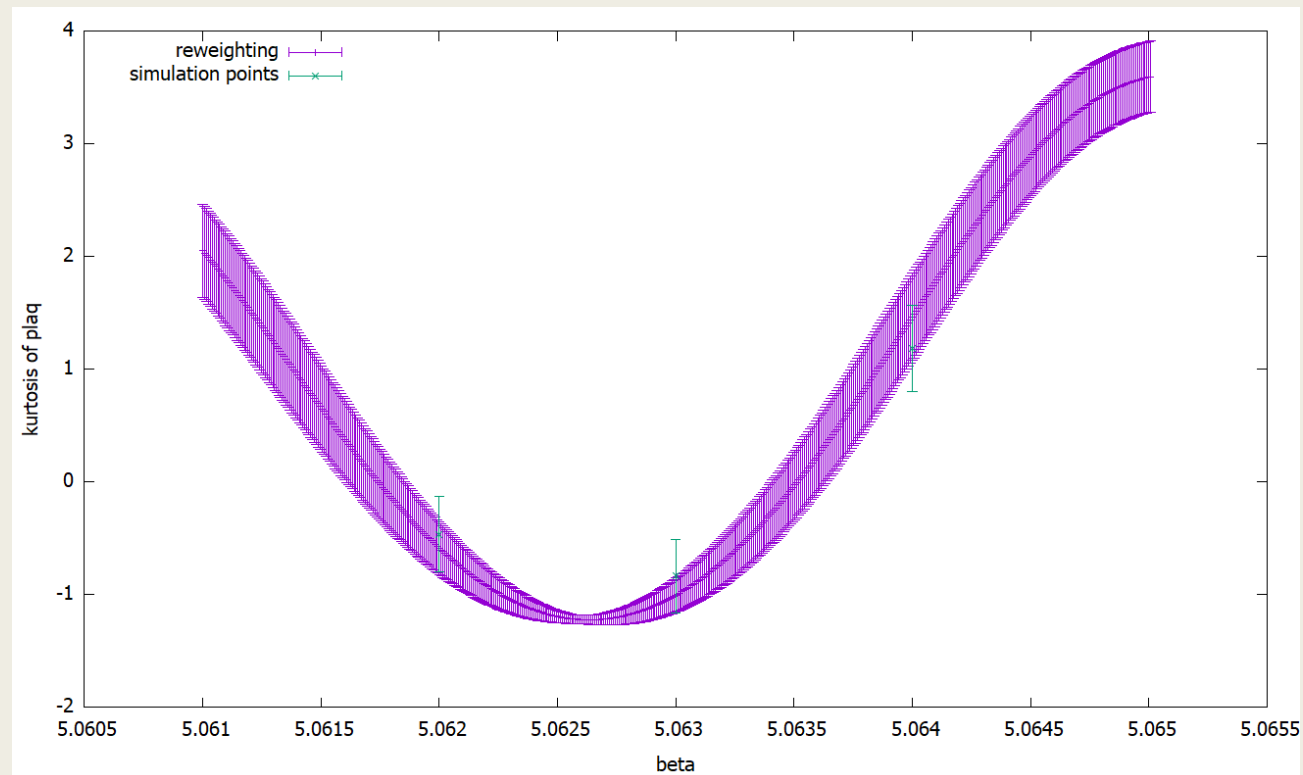
$$Q_4 = -6N_f \text{Tr} D^{-4} + 8N_f^2 \text{Tr} D^{-3} \text{Tr} D^{-1} + 3(N_f \text{Tr} D^{-2})^2 \\ - 6N_f \text{Tr} D^{-2} (\text{Tr} D^{-1})^2 + (N_f \text{Tr} D^{-1})^4$$

# 観測量及び演算子の構成

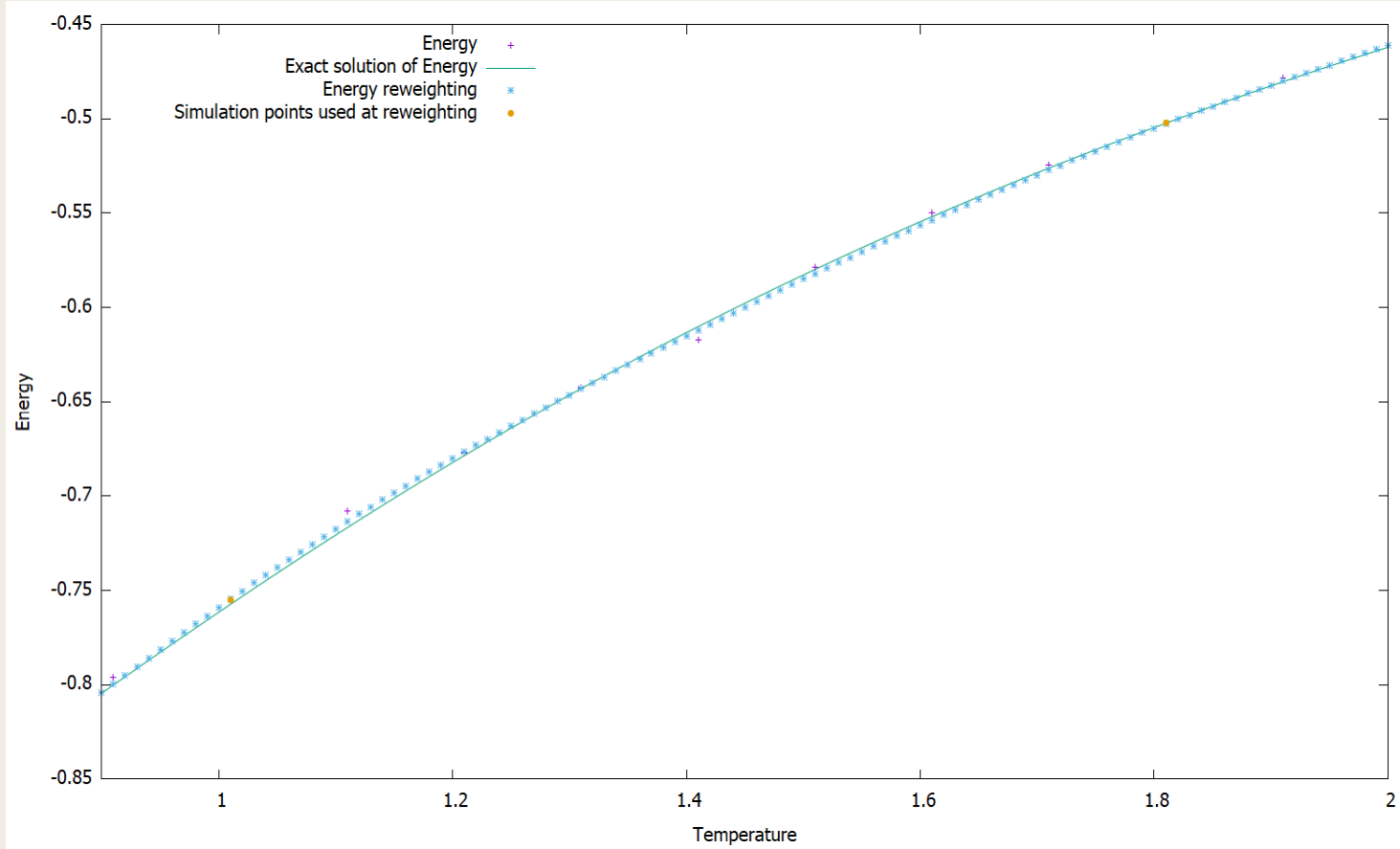
- 転移点 $\beta_T$ における各物理量の振る舞い（質量 $m$ を固定したとする）
  - 平均値  $\mu_{\hat{O}}$  vs  $\beta$  :  $\beta_T$  周りの変化が激しい
  - 感受率  $\chi_{\hat{O}}$  vs  $\beta$  :  $\beta_T$  で最大
  - 歪度  $S_{\hat{O}}$  vs  $\beta$  :  $\beta_T$  で0となる
  - 尖度  $K_{\hat{O}}$  vs  $\beta$  :  $\beta_T$  で最小
  
- ここで、尖度  $K_{\hat{O}}$  が最小となる  $\beta_T$  を転移点とする。

# データ解析： multi-point reweighting

- シミュレーション点は多いに越したことはないが、膨大な計算が必要となる。例えば、 $N_s=12, N_t=4, m$ と $\beta$ を固定して、10万個のゲージ配位を集めるのに約195時間がかかる (Cygnus, 1ノート, 並列数24)
- そこで、reweightingという方法を用いて、各シミュレーション点の間を補間する。下図は $N_s=12, N_t=4, m=0.060$ において、plaquetteの尖度に対するmulti-point reweightingの例

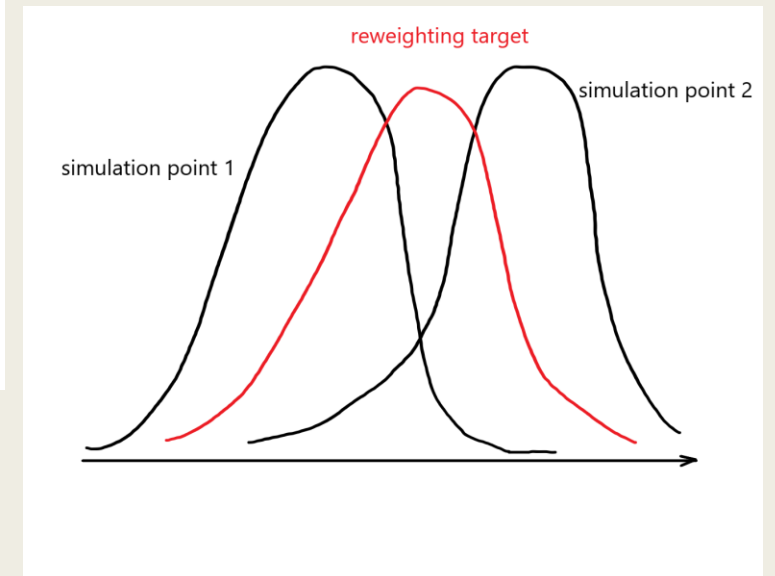


# データ解析： multi-point reweighting



- シミュレーション点の分布を用いて、他のパラメータにおけるデータ分布を推計する
- シミュレーション点の付近では分布を正確に推計することができる

例：1次元isingモデルのエネルギーに対してreweighting



# データ解析：multi-point reweighting

- 観測量 $\hat{O}$ に対するreweightingは次の式で与えられる

$$\langle \hat{O} \rangle_{(b)} = \sum_{i=1}^{N_{sp}} N_i \int G(S, \vec{S}; b, \vec{b}) \frac{w(O, S, \vec{S}; b_i)}{Z(b_i)} dO dS d\vec{S} \quad (14)$$

$$Z(b_i) = \sum_{i=1}^{N_{sp}} N_i \int G(S, \vec{S}; b, \vec{b}) w(O, S, \vec{S}; b_i) dO dS d\vec{S} \quad (15)$$

- $b$  : パラメータ空間,  $b=(m, \beta)$
- $b_i$  :  $i$ 番目のシミュレーション点のパラメータ,  $b_i=(m_i, \beta_i)$
- $\vec{b}$  :  $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{N_{sp}})$
- $N_i$  :  $i$ 番目のシミュレーション点に含まれるデータの数
- $S$  : パラメータ $b$ における作用
- $S_i$  :  $i$ 番目のシミュレーション点の作用
- $G$  : reweighting factor

# データ解析：尖度交差法

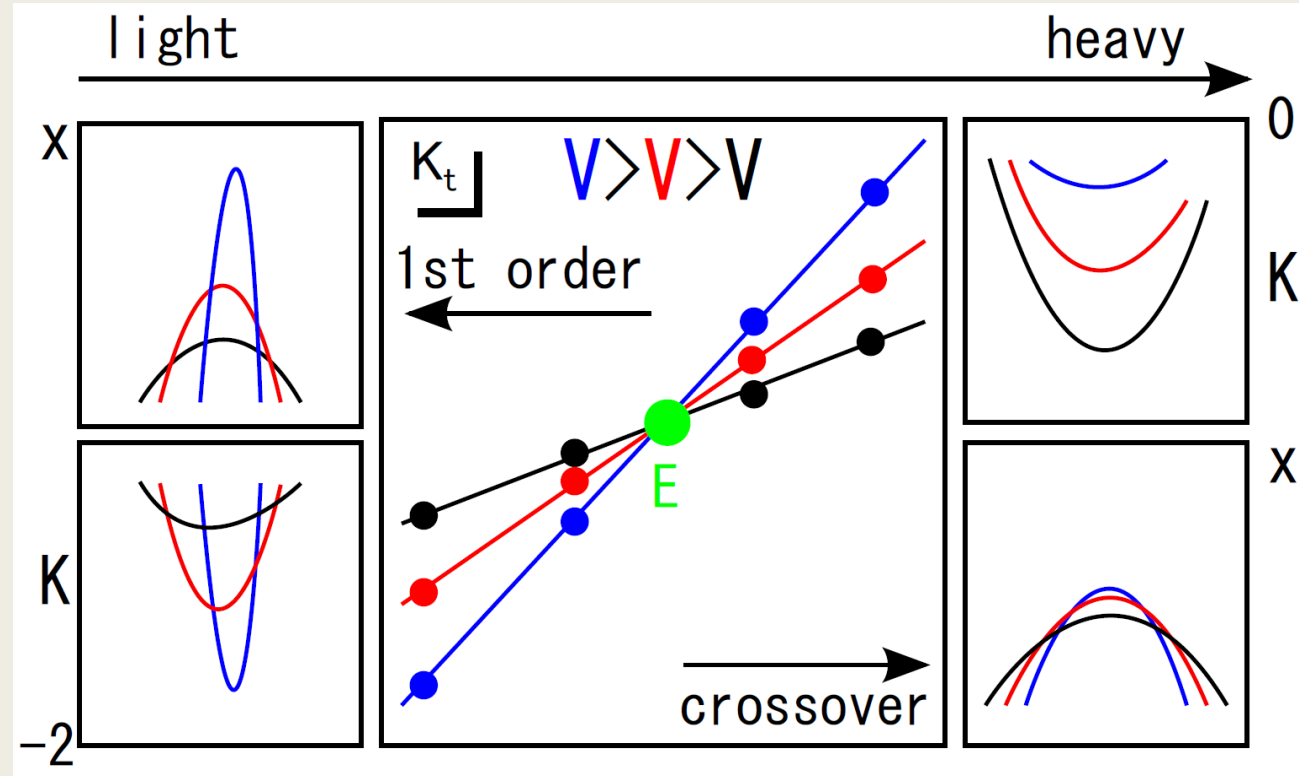
- 数値計算では、熱力学極限 ( $N_s^3 \times N_t \rightarrow \infty$ ) を取るのが不可能
- 有限系から無限系を推定：有限サイズスケーリング
- 尖度の有限サイズスケーリング（1次まで）

$$K = K_E + aN_s^{1/\nu} (m - m_E), \quad \text{mass fixed} \quad (16)$$

$$K = K_E + aN_s^{1/\nu} (\beta - \beta_E), \quad \text{beta fixed} \quad (17)$$

- 質量を固定して、尖度の最小値を探るので、(16)式を使用
- $m=m_E$ （CEP）のとき、 $K$ は体積に依存しない
- 質量 $m$ 及び空間サイズ $N_s$ を変数として、 $K(m, N_s)$ をフィッティングする。フィッティングパラメータは  $a, \nu, K_E, m_E$  である。

# データ解析：尖度交差法



Xiao-Yong Jin, Yoshinobu Kuramashi, Yoshifumi Nakamura, Shinji Takeda, Akira Ukawa, Phys.Rev.D 91 (2015) 1, 014508

- フィッティングパラメータを(16)式に代入して、プロットすると上のようなグラフが得られる
- 交わった点( $m_E, K_E$ )はcritical end pointにおける質量と尖度の値である



# 研究の流れ及びシミュレーションの設定

## 研究の流れ

- 格子サイズ $N_s^3 \times N_t$ を固定して、CEP付近の $(m, \beta)$ を探し出す
- $N_s, N_t, m$ を固定し、 $\beta$ に対してreweightingを行う
- Reweightingの結果を用いて、尖度 $K$ の最小値 $K_t$ を求める
- $N_s, m, K_t(N_s, m)$ を用いて、(16)をフィッティングする

## シミュレーションの設定

- $N_t=4, N_s=8, 12, 16$
- $\text{mass}=0.040, 0.050, 0.060$
- 詳しいパラメータの設定は右の表で示される

mass	Ns	beta	traj	mass	Ns	beta	traj	mass	Ns	beta	traj
0.040	8	5.021	64200	0.050	8	5.043	60000	0.060	8	5.062	60000
	8	5.022	60000		8	5.044	60000		8	5.063	60080
	8	5.023	60000		8	5.045	60000		8	5.064	60000
	12	5.021	120000		12	5.042	120000		12	5.061	120000
	12	5.022	120000		12	5.043	120000		12	5.062	120000
	12	5.023	120000		12	5.044	120000		12	5.063	120000
	16	5.021	102000		16	5.042	102000		16	5.062	102000
	16	5.022	102000		16	5.043	102000		16	5.063	102000

# 現時点での結果

# -0.9

# -1

- $m_E = 0.0602984 \pm 0.002055$  (3.409%)
- $K_E = -1.25314 \pm 0.03676$  (2.934%)
- $v = 0.843001 \pm 0.103$  (12.22%)
- $a = 1.05565 \pm 0.3899$  (36.94%)

nt	m	ns	beta	kurtosis	kurtosis err
4	0.04	8	5.022656	-1.508422	1.273705E-02
	0.05	8	5.043979	-1.369243	1.233633E-02
	0.06	8	5.063020	-1.272810	1.757307E-02
	0.04	12	5.022461	-1.663747	1.222457E-02
	0.05	12	5.043150	-1.473683	1.882920E-02
	0.06	12	5.062441	-1.245212	2.073570E-02
	0.04	16	5.022046	-1.823168	1.049363E-02
	0.05	16	5.043115	-1.584382	2.681388E-02

ただし、arXiv:2107.12739の結果に一致しない $m_E = 0.0551(6)$ 。理由はキュムラントの定義が違うからである。

# 現時点での結果

- そこで、尖度の定義を次のように変える： $\langle \hat{O}^2 \rangle = \langle Q_1^2 \rangle$ ,  $\langle \hat{O}^3 \rangle = \langle Q_1^3 \rangle$ ,  $\langle \hat{O}^4 \rangle = \langle Q_1^4 \rangle$

-0.9

-1

- $m_E = 0.0576365 \pm 0.001743$  (3.025%)
- $K_E = -1.33322 \pm 0.03041$  (2.281%)
- $v = 0.790922 \pm 0.09561$  (12.09%)
- $a = 0.851666 \pm 0.3328$  (39.07%)

nt	m	ns	beta	kurtosis	kurtosis err
4	0.04	8	5.022630	-1.547086	1.267649E-02
	0.05	8	5.043947	-1.412991	1.229458E-02
	0.06	8	5.062984	-1.321154	1.765154E-02
	0.04	12	5.022458	-1.678680	1.215296E-02
	0.05	12	5.043146	-1.492535	1.874333E-02
	0.06	12	5.062435	-1.267929	2.071231E-02
	0.04	16	5.022045	-1.830100	1.045238E-02
	0.05	16	5.043114	-1.594363	2.674783E-02
	0.06	16	5.062614	-1.244586	3.625299E-02

すると、誤差を含んでPhilipsenの結果に近づく

## 問題点

- $m=0.040$ のデータは誤差が他のと比べて小さいため、エラー付けのフィッティングを行う際に重みが $m=0.040$ に偏ってしまう。

## 解決法

- $m=0.070$ を計算し、尖度交差法を改めてやり直す

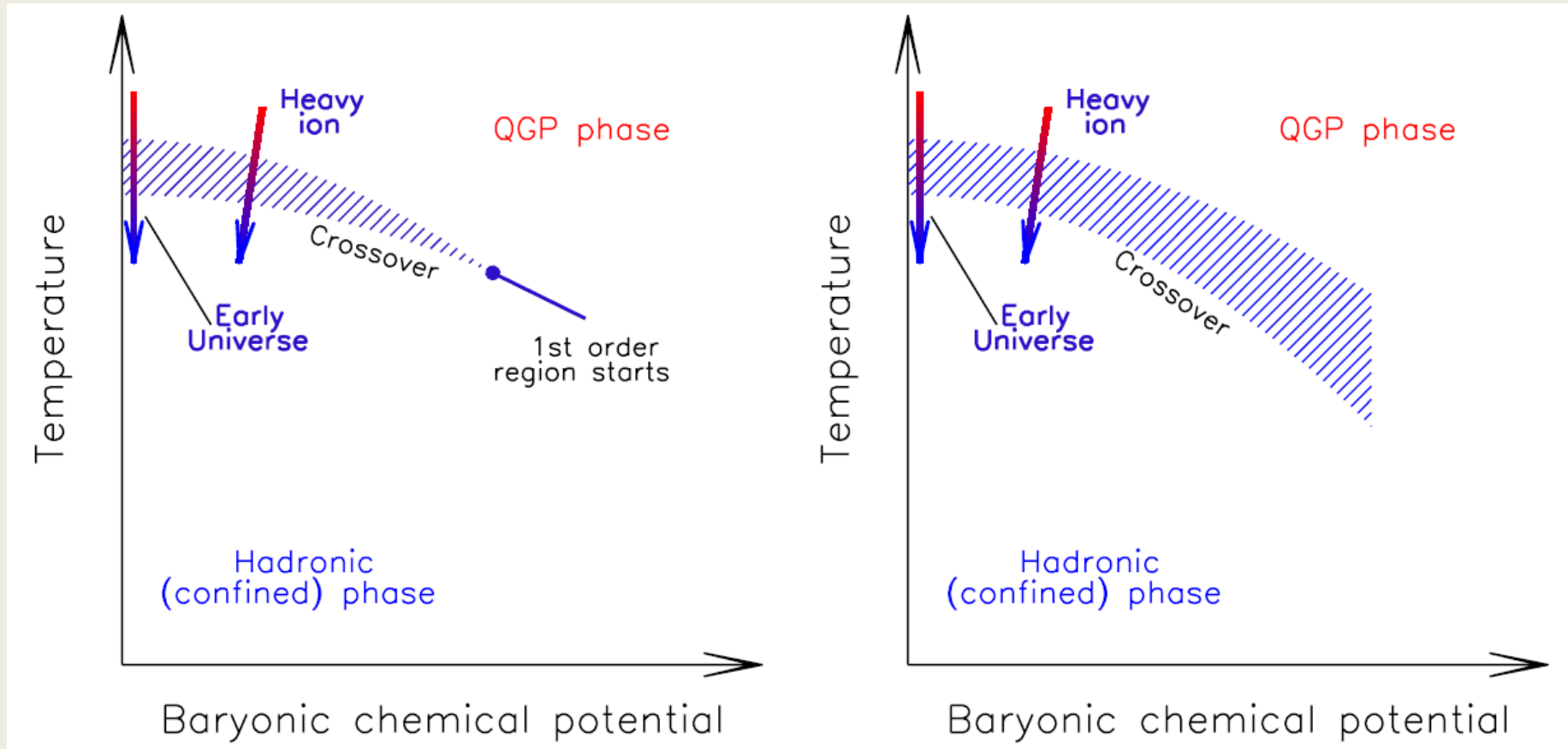
## 今後の課題

- $N_t=8, 10$ のCEPを探して、相転移の振る舞いを確認する

# 参考文献

- [Owe Philipsen, Acta Phys.Polon.Supp. 5 \(2012\) 825-835](#)
- [Heng-Tong Ding, Frithjof Karsch, Swagato Mukherjee, Int.J.Mod.Phys.E 24 \(2015\) 10, 1530007](#)
- [G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabo, JHEP 04 \(2011\) 001](#)
- [R. Iwami, S. Ejiri, K. Kanaya, Y. Nakagawa, D. Yamamoto, T. Umeda, Phys.Rev.D 92 \(2015\) 9, 094507](#)
- [Xiao-Yong Jin, Yoshinobu Kuramashi, Yoshifumi Nakamura, Shinji Takeda, Akira Ukawa, Phys.Rev.D 91 \(2015\) 1, 014508](#)
- [Francesca Cuteri, Owe Philipsen, Alessandro Sciarra, arXiv:2107.12739](#)
- [Philippe de Forcrand, Massimo D'Elia, PoS LATTICE2016 \(2017\) 081](#)

# QCD相図

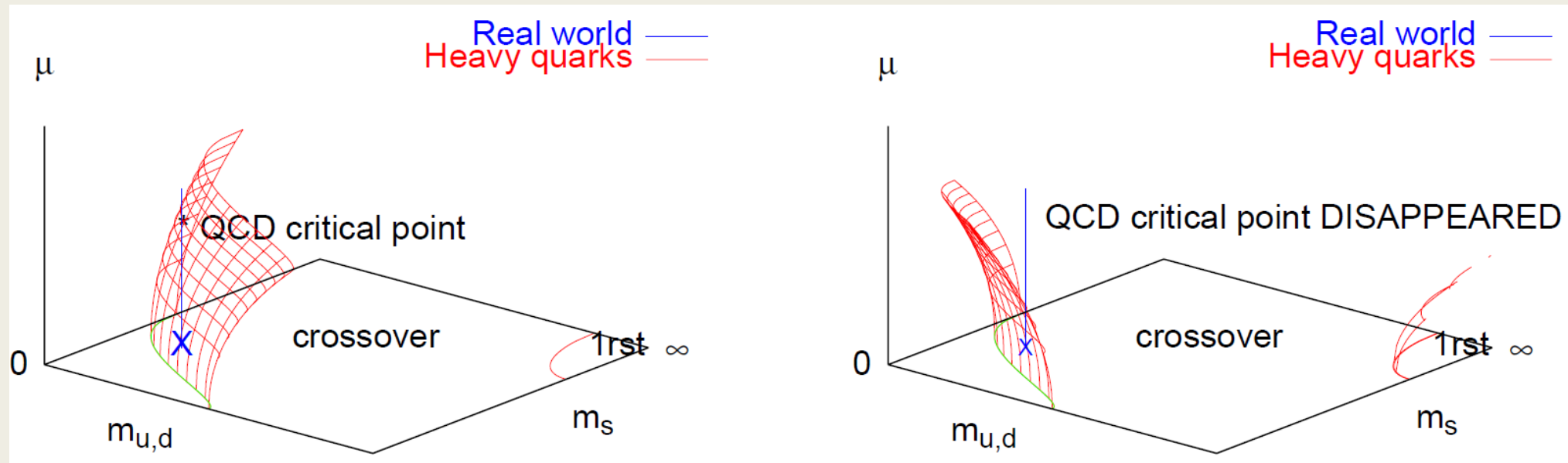


G. Endrodi, Z. Fodor, S.D. Katz, K.K. Szabo, JHEP 04 (2011) 001

CEP(Critical end point)が存在  
最近のWilson fermionを用いた  
研究ではこっちの方が好まし  
い

CEP(Critical end point)がない

# Columbia plot

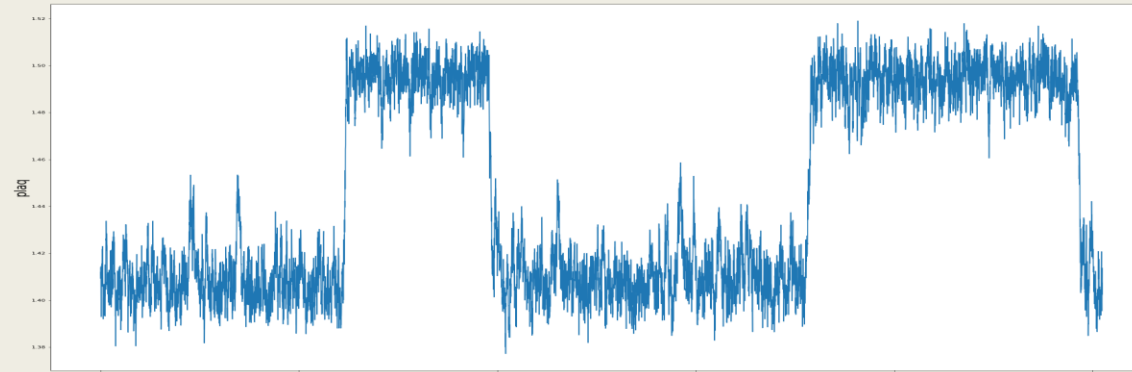
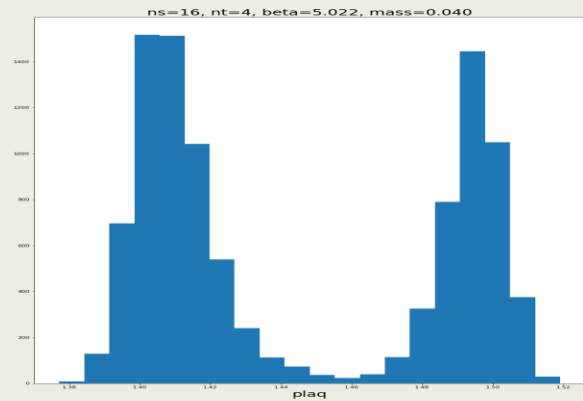
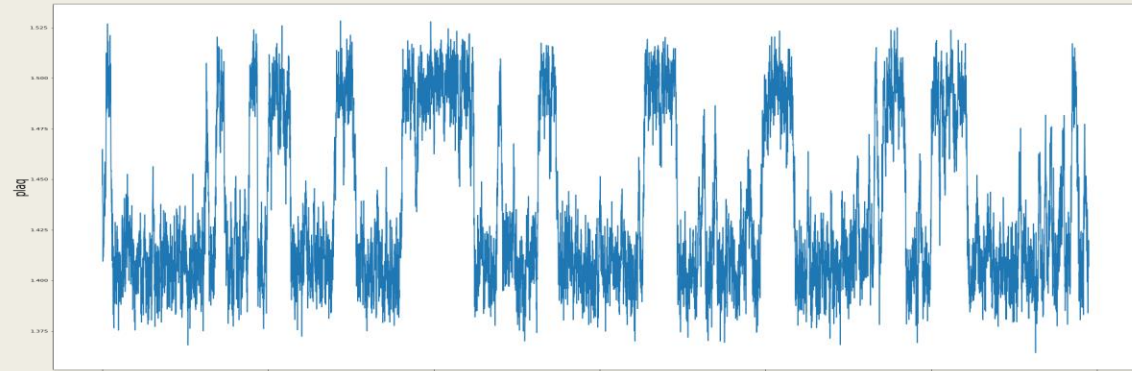
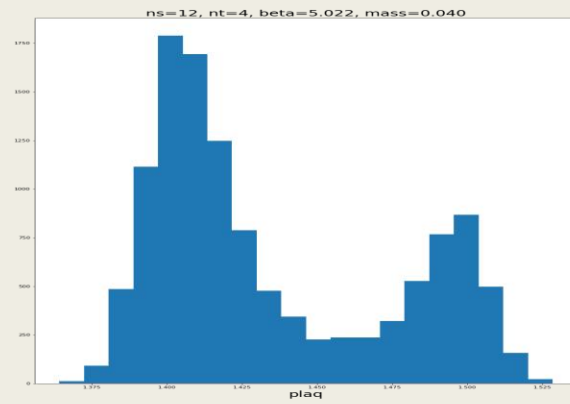
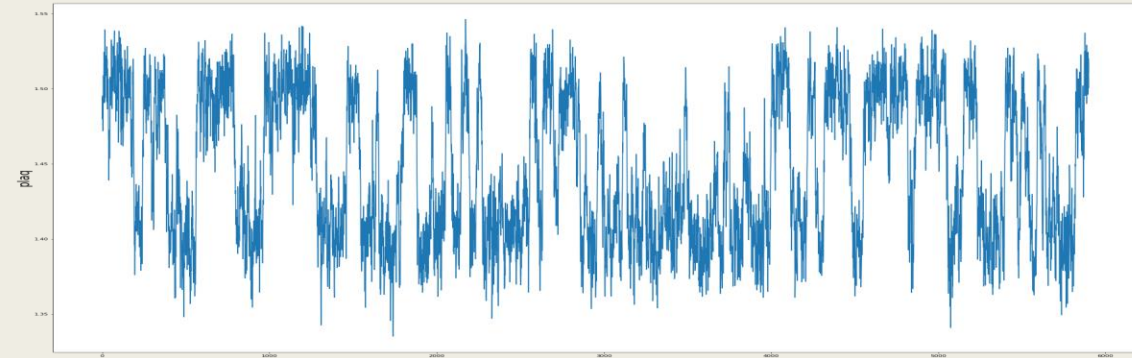
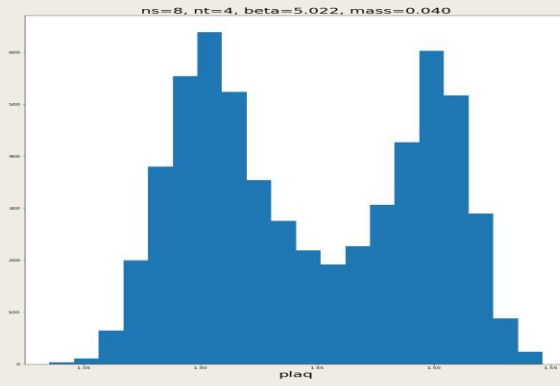


Owe Philipsen, Acta Phys.Polon.Supp. 5 (2012) 825-835

CEP(Critical end point)が存在

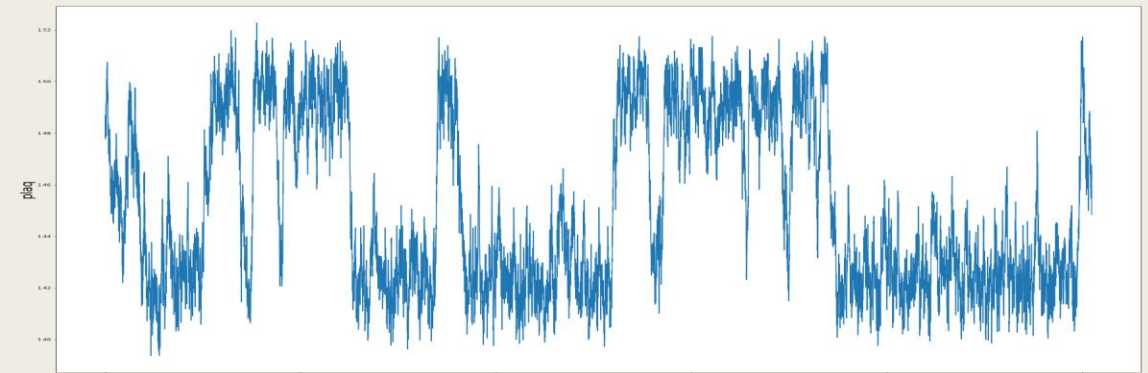
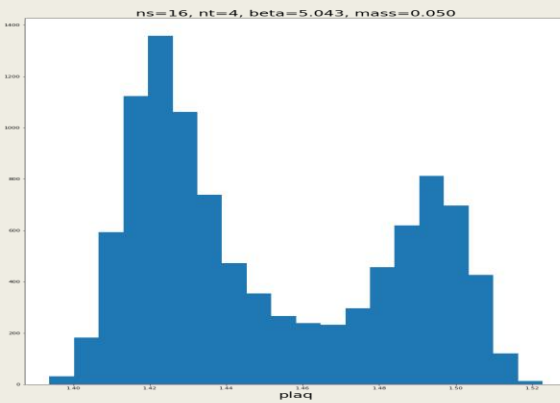
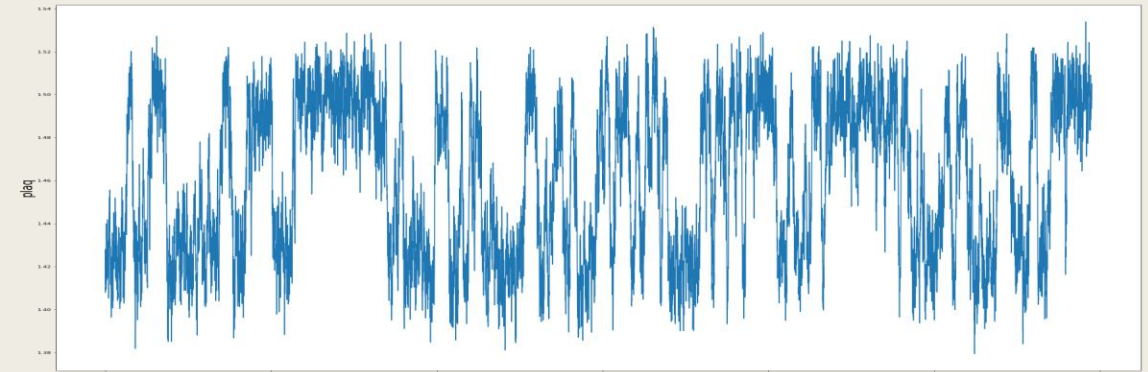
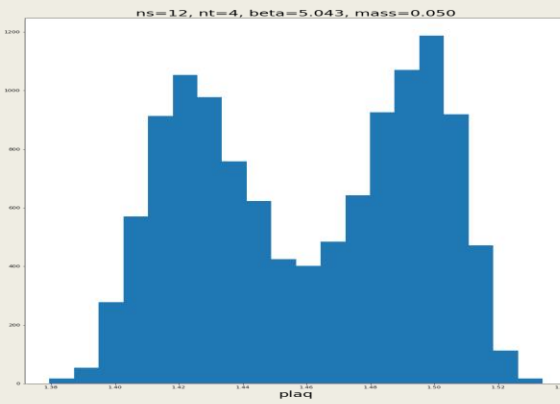
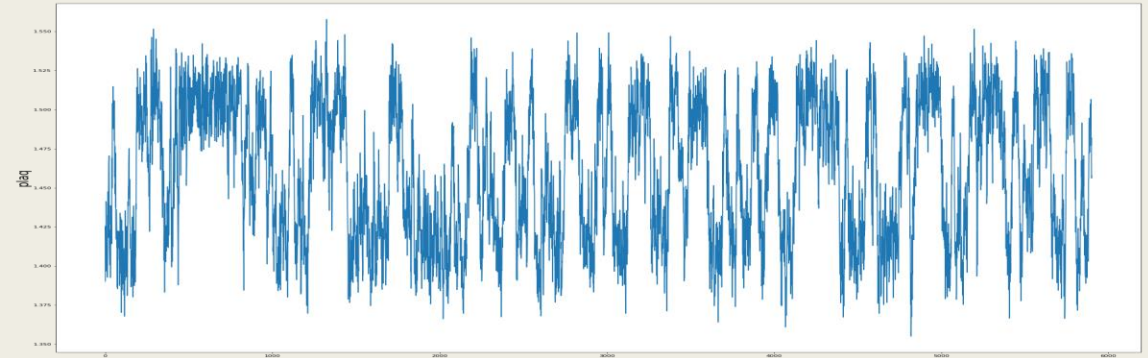
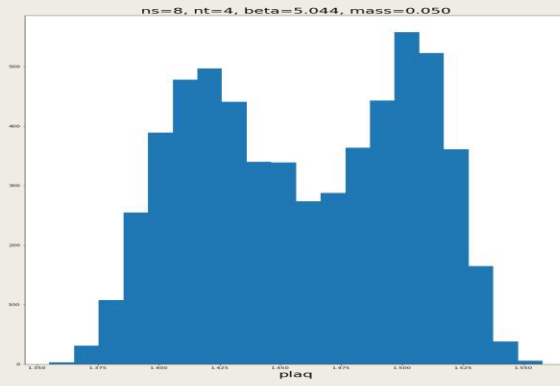
CEP(Critical end point)がない

# ヒストグラムとヒストリー : plaquette, $m=0.040$

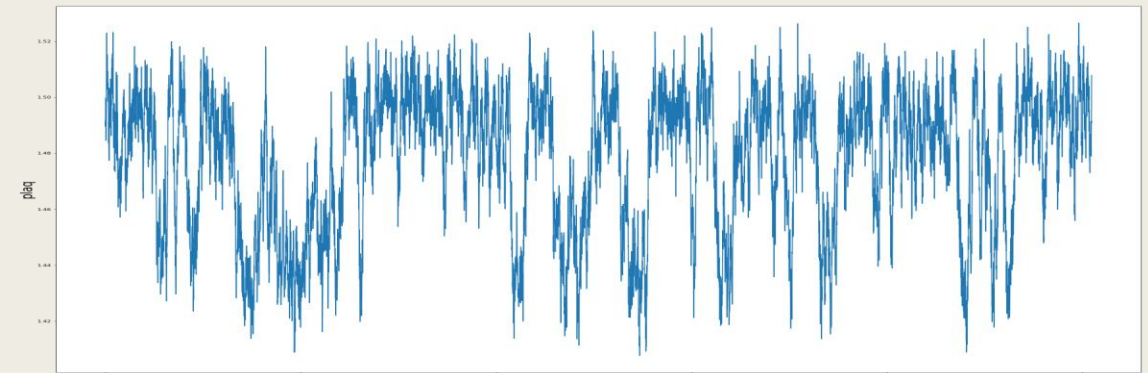
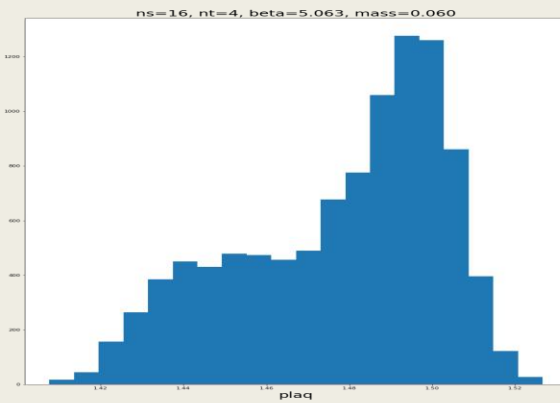
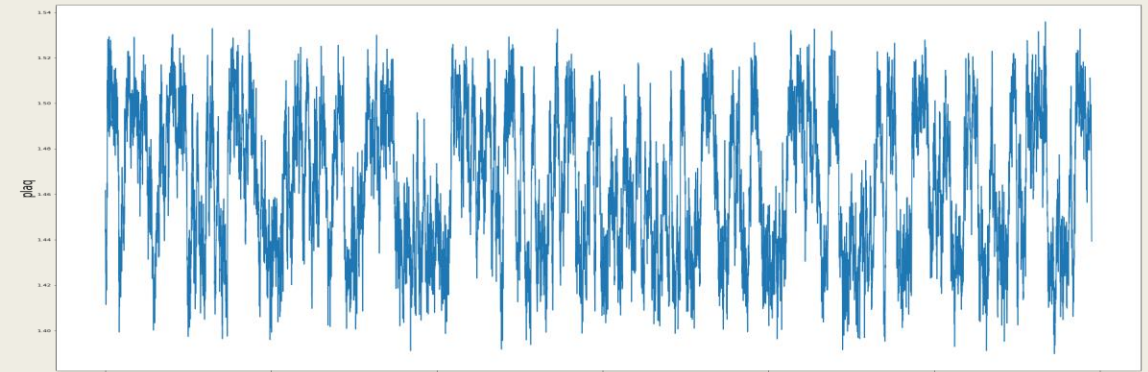
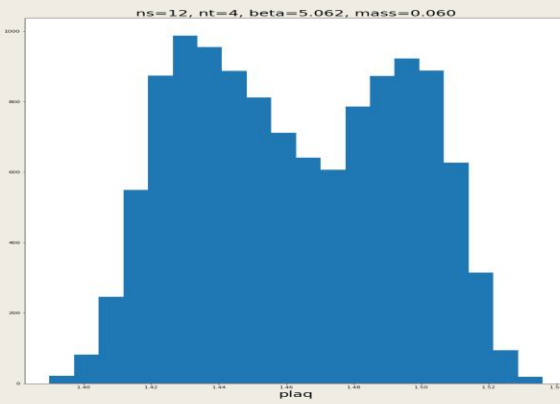
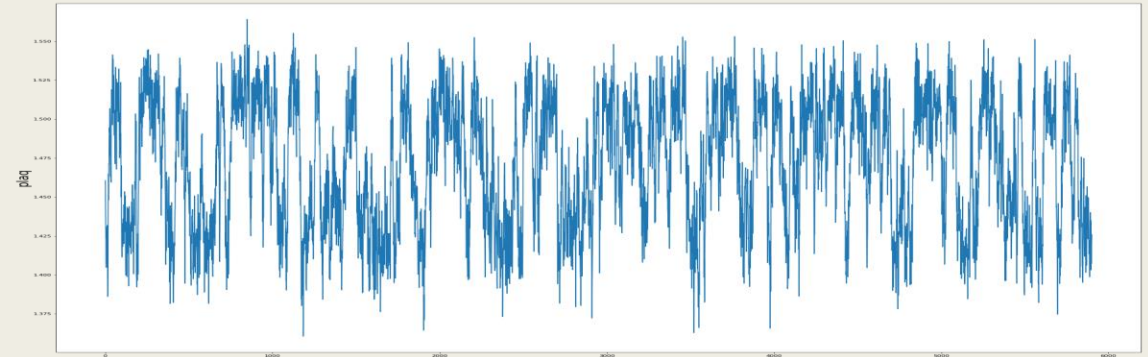
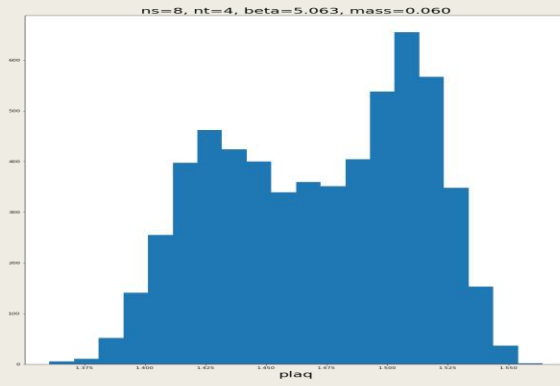




# ヒストグラムとヒストリー : plaquette, $m=0.050$



# ヒストグラムとヒストリー : plaquette, $m=0.060$



感受率と尖度 : chiral condensate,  $m=0.040$

2500



感受率と尖度 : chiral condensate,  $m=0.050$

1400



感受率と尖度 : chiral condensate,  $m=0.060$

700

