モデルに依存しない手法による形状因子の直接微分計算と改良

Xu Feng, Yang Fu, Lu-Chang Jin
(Phys. Rev. D 101, 051502(R))

Journal Club, 2019.12.13 Naruhito Ishizuka

Journal Club, 2021.10.15
Kohei Satoh

π 中間子の形状因子と荷電半径

本論文では π 中間子の形状因子と荷電半径の計算方法について議論されている。

○ (電磁気的) 形状因子

　粒子の電磁気的な形状 (空間的広がり) を表す物理量。

$$\langle \pi(p)|J_\mu(x=0)|\pi(0)\rangle = p_\mu F(p^2)$$

p：運動量、J_μ：電磁ベクトルカレント ($J_\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f$)

○荷電半径

　粒子内の電荷分布の大きさを表す量。

$$F(p^2) = 1 - \frac{\langle r_\pi^2 \rangle}{6} p^2 + \cdots$$

抽象化して表現すると、形状因子 $F(p^2)$ を p^2 でテイラー展開したとき

$$F(p^2) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n p^{2n}$$

係数 f_1 を求めることは、荷電半径の 2 乗平均を求めることと同値。

格子 QCD による形状因子の計算法

従来、格子 QCD による形状因子 f_1 の計算方法には以下がある

- フィット関数 (モデル) を導入
  (+ねじれた境界条件を考慮, arXiv:0804.3971v1)
- クォークプロパゲータの運動量微分による計算
  (Physics Letters B 718 (2012) 589-596)

近年、形状因子を計算する新たな方法が提案された (Phys. Rev. D 101, 051502(R))

- シンプル：ねじれた境界条件や形状因子の運動量依存性のモデル化など複雑なテクニックが必要ない。
- 柔軟性：様々な物理過程に応用できる。
- 精度：従来の方法によるものよりも約 $1.5 \sim 1.9$ 倍小さくなった。

※詳細は石塚さんの文献紹介 (2019/12/13)

本論文で言いたいこと

ハドロン関数 $H^{(L)}(\vec{x},t)$ を適切な重み $\omega(\vec{x},t)$ で足し合わせると興味のある物理量 O を計算できる。

$$O=\sum_{\vec{x}}\omega(\vec{x},t)H^{(L)}(\vec{x},t)\qquad\text{(for large }t)$$

$\omega(\vec{x},t)$：weight 関数、$H^{(L)}(\vec{x},t)$：ハドロン関数、O：興味のある物理量

—ポイント—

1. x^{2n} のモーメントと n 階微分の対応
2. 形状因子のテイラー展開
3. その他 (誤差を低減するテクニック)

本論文で行なっていること

1 次元のモデルに簡略化すると…

$$
\begin{aligned}
C^{(n)}(t) &= \sum_x x^{2n} H(t,x) = \sum_x x^{2n} \frac{1}{L} \sum_p \tilde{H}(t,p) e^{ipx} \\
&= \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) F(p) \qquad \left(\tilde{H}(t,p) := \Delta(t,p) F(p),\ T_n(p) := \frac{1}{L} \sum_x x^{2n} e^{ipx} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N_m} f_m \beta_{m,n}(t) \quad \left(F(p) := \sum_{m=0}^{N_m} f_m p^{2m},\ \beta_{m,n}(t) := \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) p^{2m} \right)
\end{aligned}
$$

を考える。

本論文で行なっていること

このとき $R(t)$ をパラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を用いて

$$\begin{aligned} R(t) &:= \alpha_1 C^{(1)}(t) + \alpha_2 C^{(2)}(t) + \alpha_3 C^{(3)}(t) \\ &= (\alpha_1\beta_{1,0} + \alpha_2\beta_{2,0} + \alpha_3\beta_{3,0}) f_0 + (\alpha_1\beta_{1,1} + \alpha_2\beta_{2,1} + \alpha_3\beta_{3,1}) f_1 \\ &\qquad + (\alpha_1\beta_{1,2} + \alpha_2\beta_{2,2} + \alpha_3\beta_{3,2}) f_2 + \cdots \end{aligned}$$

と定義する。このときパラメータ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は

$$\alpha_1\beta_{1,0} + \alpha_2\beta_{2,0} + \alpha_3\beta_{3,0} = 0 \quad \alpha_1\beta_{1,1} + \alpha_2\beta_{2,1} + \alpha_3\beta_{3,1} = 1 \quad \alpha_1\beta_{1,2} + \alpha_2\beta_{2,2} + \alpha_3\beta_{3,2} = 0$$

を満たすように選択される。以上より $R(t)$ は

$$R(t) = f_1 + \sum_{m=3} \left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_k \beta_{k,m}(t) \right) f_m$$

→ f_m $(m \geq 3)$ の寄与が小さいと考えると、$R(t)$ の定数の振る舞いから f_1 を計算可能

我々が行なっていること

我々は...

$$
\begin{aligned}
C^{(n)}(t) &= \sum_x x^{2n} H(t,x) \\
&= \sum_{m=0}^{N_m} f_m \beta_{m,n}(t) \quad \left(F(p) := \sum_{m=0}^{N_m} f_m p^{2m}, \;\; \beta_{m,n}(t) := \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) p^{2m} \right)
\end{aligned}
$$

→ $H(t,x)$ を入力とし、$\beta_{m,n}(t)$ で fit することにより出力 f_m を得られる。

我々が行なっていること

π 中間子の形状因子を想定し、形状因子として pole 形式を採用。

$$F(p) := \frac{1}{1+Ap^2} \qquad (A \in \boldsymbol{R}_{>0})$$

また、$\Delta(t,p)$ として

$$\Delta(t,p) := \frac{e^{-Et} + e^{-E(T-t)}}{2E} \qquad \left(E = \sqrt{M^2+p^2}\right)$$

を考え、疑似データ群 $\{C^{(n)}(t)\}$ を

$$C^{(n)}(t) = \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) F(p)$$

で作成し、

$$L \times T = 32 \times 48; \;\; M = 0.5; \;\; N_m = 3; \;\; \text{fit range } t = 6 \sim 24; \;\; \text{error } = 0.01\%$$

の下で、解析法の限界を調べた。

$F(p) = \frac{1}{1+0.1p^2}$ の結果

$A = 0.1;\ \ n = 4$

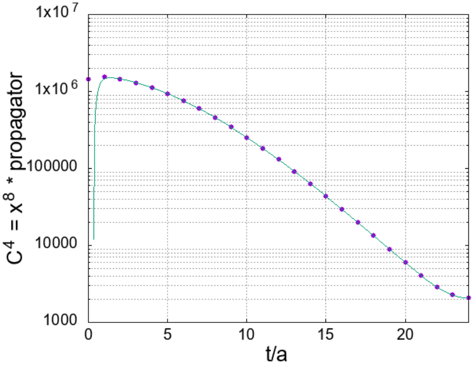

Figure: fit のプロット

$$C^{(4)}(t) = \sum_{m=0}^{3} f_m \beta_{m,n}(t)$$

n	f0	f1	f2	f3	χ 2/dof
4	1.00	-0.10	0.009	-0.007	0.007

Table: 計算結果

f_1 の pole(A) 依存性

$$n = 4; \quad F(p) = \frac{1}{1 + Ap^2}$$

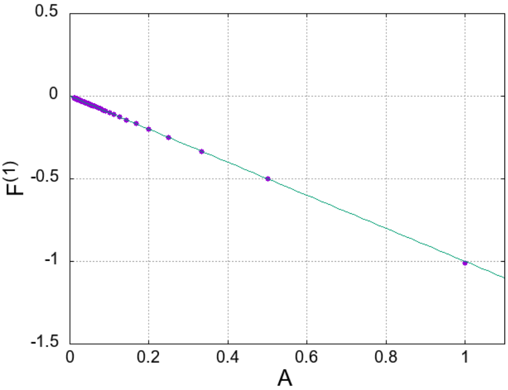

Figure: $A < 1$ での f_1 の振る舞い

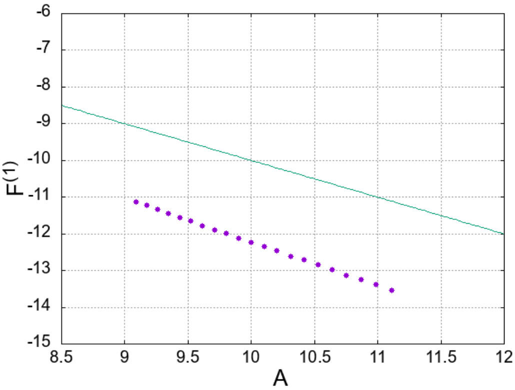

Figure: $A > 1$ での f_1 の振る舞い

pole(A) の依存性

A が大きくなると fit の振る舞いが悪くなる。

$$F(p) = \frac{1}{1 + Ap^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-A)^m p^{2m} \qquad \therefore f_m = (-A)^m$$

→ $|f_m|$ は $A > 1$ ならば単調増加列。

→ fit を行なうとき、fit parameter は有限個。

→発散する無限個の parameter を無視する (0 と考える) ことに問題がある可能性

どうにかして、大きな A でも正しく fit できるようにしたい。

fit の改良

$$
\begin{aligned}
C^{(n)}(t) &= \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) F(p) \\
&= \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) {\color{red}S(p)} \frac{1}{\color{blue}G(p)} \quad \left({\color{red}S(p)} := F(p)G(p),\ \ {\color{blue}G(p)} := 1 + g_1 p^2 + g_2 p^4\right) \\
&= \sum_{m=0}^{N_m} {\color{orange}s_m} {\color{green}\tilde{\beta}_{m,n}(t)} \quad \left(S(p) := \sum_{m=0}^{N_m} {\color{orange}s_m} p^{2m},\ \ {\color{green}\tilde{\beta}_{m,n}(t)} := \sum_p \Delta(t,p) T_n(p) p^{2m} / G(p)\right)
\end{aligned}
$$

このとき

$$
s_0 = f_0 \quad s_1 = f_1 + f_0 g_1 \quad s_2 = f_2 + f_1 g_1 + f_0 g_2 \quad \cdots \quad \left(F(p) = \frac{1}{1 + Ap^2},\ \ f_m = (-A)^m\right)
$$

が成り立つ。また、g_1, g_2 は $s_2 = 0$ となるような値を選ぶ。

何故… → $s_m = (-A)s_{m-1} \quad (m \geq 3)$ が成り立つので $s_2 = 0$ ならば $s_m = 0 (m \geq 3)$

$G(p) = 1$ の結果

$A = 10;\ \ n = 1, 4;\ \ g_1 = g_2 = 0$

$(f_1 = -10,\ \ f_2 = 100,\ \ , f_m = (-10)^m)$

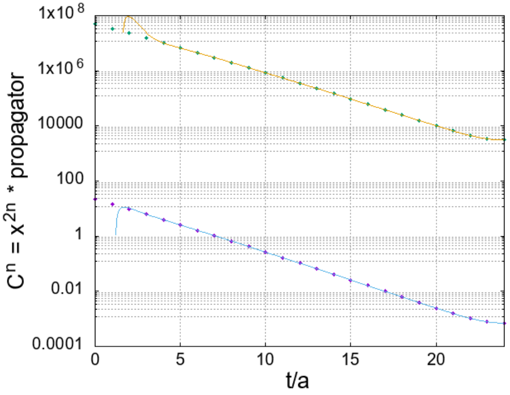

Figure: fit のプロット

$$
\begin{aligned}
C^{(n)}(t) &= \sum_{m=0}^{3} s_m \tilde{\beta}_{m,n}(t) = \sum_{m=0}^{3} f_m \beta_{m,n}(t) \\
s_0 &= f_0 \\
s_1 &= f_1 \\
s_2 &= f_2
\end{aligned}
$$

n	s0	s1	s2	s3	χ 2/dof	f1	f2
1	0.987	-9.06	38.3	-181	2.65	-9.06	38.3
4	0.809	-12.4	27.0	-237	1292	-12.4	27.0

Table: 計算結果

$G(p) = 1 + 9p^2 - 10p^4$ の結果

$A = 10;\ \ n = 1, 4;\ \ g_1 = 9;\ \ g_2 = -10$

$(f_1 = -10,\ \ f_2 = 100,\ \ , f_m = (-10)^m)$

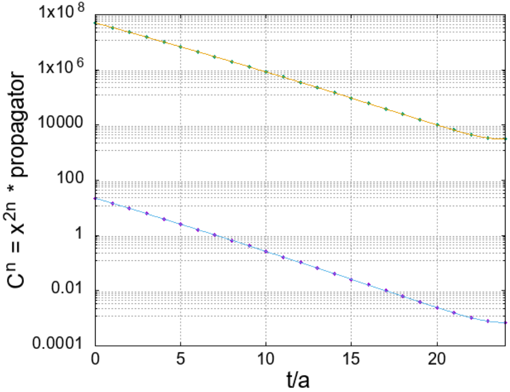

Figure: fit のプロット

$$
\begin{aligned}
C^{(n)}(t) &= \sum_{m=0}^{3} s_m \tilde{\beta}_{m,n}(t) \\
s_0 &= f_0 \\
s_1 &= f_1 + 9s_0 \\
s_2 &= f_2 + 9(s_1 - 9s_0) - 10s_0
\end{aligned}
$$

n	s0	s1	s2	s3	χ2/dof	f1	f2
1	1.00	-1.00	0.06	-0.07	0.01	-10.0	100.0
4	1.00	-1.00	-0.01	0.01	0.01	-10.0	100.0

Table: 計算結果

まとめと課題

—まとめ—
pole 形式の形状因子において、A が大きな場合、この新手法がうまく働かないことを見つけた。またこの問題に対し、新たな関数 $G(p)$ を適切に導入することにより、fit が改善されることを確認した。

今後の課題として以下があげられる。
—課題—

- 解析手法における A 依存性以外の限界の模索
- g_1, g_2 をどのようにして効率よく決めるか (アルゴリズムの開発)
- pole 形式以外の場合の計算方法
- 実際の LatticeQCD に適応する
- K_{l3} 崩壊の形状因子に適応する

Backup

以下、補足資料

s_m について

$$F(x) = \frac{1}{1+ax} = \sum_m f_m x^m, \quad G(x) = 1 + g_1 x + g_2 x^2, \quad S(x) = F(x)G(x) = \sum_m s_m x^m$$

このとき $m \geq 2$ に対し

$$\begin{aligned} s_m = \frac{1}{m!}\frac{d^m S}{dx^m}\bigg|_{x=0} &= \frac{1}{m!}\left\{\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} F^{(m-k)} G^{(k)}\right\}\bigg|_{x=0} \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!}(m-k)!(-A)^{m-k} G^{(k)} \qquad (\because F^{(m)} = m!(-A)^m) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(-A)^{m-k}}{k!} G^{(k)} = (-A)^m + (-A)^{m-1} g_1 + (-A)^{m-2} g_2 \end{aligned}$$

よって $m \geq 3$ に対し

$$s_m = (-A) \times \left\{(-A)^{m-1} + (-A)^{m-2} g_1 + (-A)^{m-3} g_2\right\} = (-A) s_{m-1}$$

連続空間での考察

Euclidean なハドロン関数 (パイオンプロパゲータ) を以下の様に定める。

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \left\langle 0 \middle| A_4(x) J_4(0) \middle| \pi(\vec{0}) \right\rangle \qquad (A_4 = \bar{u}\gamma_4\gamma_5 d) \\
&\doteq \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{f_\pi}{2} (E + m_\pi) F_\pi(q^2) e^{-Et + i\vec{p}\cdot\vec{x}} =: H_\pi(x) \qquad (\text{for large } \ t)
\end{aligned}
$$

式変形の際に以下の式を用いた。

$$
\begin{aligned}
\text{PCAC 関係式：} \quad \langle 0|A_4(0)|\pi(\vec{p})\rangle &= E f_\pi \qquad (E = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}^2}) \\
\text{形状因子：} \quad \left\langle \pi(\vec{p}) \middle| J_4(0) \middle| \pi(\vec{0}) \right\rangle &= (E + m_\pi) F_\pi(q^2) \qquad (q^2 = (E - m_\pi)^2 - \vec{p}^2)
\end{aligned}
$$

プロパゲータの空間成分についてフーリエ変換すると

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}(t, \vec{p}) \doteq \tilde{H}_\pi(t, \vec{p}) &:= \int d^3x H_\pi(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \\
&= \frac{f_\pi}{2} (E + m_\pi) F_\pi(q^2) e^{-Et} \qquad (\text{for large } \ t)
\end{aligned}
$$

連続空間での考察

ここで以下の量を考える。

$$R(t) := \frac{m_\pi^2}{\tilde{H}(t,\vec{0})} \left.\frac{\partial \tilde{H}(t,\vec{p})}{\partial |\vec{p}|^2}\right|_{|\vec{p}|^2=0} = \frac{D(t)}{\tilde{H}(t,\vec{0})} \qquad \left(D(t) := m_\pi^2 \left.\frac{\partial \tilde{H}(t,\vec{p})}{\partial |\vec{p}|^2}\right|_{|\vec{p}|^2=0} \right)$$

ここで $\tilde{H}(t,\vec{p})$(一般形) の微分は次の様になる。

$$D(t) = m_\pi^2 \left.\frac{\partial \tilde{H}(t,\vec{p})}{\partial |\vec{p}|^2}\right|_{|\vec{p}|^2=0} = m_\pi^2 \left.\frac{d}{d|\vec{p}|^2}\right|_{|\vec{p}|^2=0} \int d^3x H(x) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} = -\frac{m_\pi^2}{3!} \int d^3x |\vec{x}|^2 H(x)$$

プロパゲータの $|\vec{p}|^2 = 0$ での (n 階) 微分 $D(t)$ を計算する

⇔プロパゲータの ($2n$ 次の) モーメントを計算する

連続空間での考察

一方 $\tilde{H}_\pi(t,\vec{0})$(基底状態) に対し $R(t)$ を計算すると

$$\frac{m_\pi^2}{\tilde{H}_\pi(t,\vec{0})}\frac{\partial \tilde{H}_\pi(t,\vec{p})}{\partial|\vec{p}|^2}\Bigg|_{|\vec{p}|^2=0} = \frac{1}{4} - \frac{m_\pi t}{2} - c_1$$

プロパゲータの $|\vec{p}|^2 = 0$ での (n 階) 微分 $D(t)$ を計算する

⇔形状因子の係数 (c_n) を計算する（関係する）

以上より

$$R(t) = \frac{D(t)}{\tilde{H}(t,\vec{0})} = -\frac{m_\pi^2}{3!\tilde{H}(t,\vec{0})}\int d^3x|\vec{x}|^2 H(x) \doteq \frac{1}{4} - \frac{m_\pi t}{2} - c_1 \qquad (\text{for large } t)$$

プロパゲータの ($2n$ 次の) モーメントを計算する

⇔形状因子の係数 (c_n) を計算する（関係する）

→左辺：格子 QCD 計算の入力　右辺：求めたい量の出力

格子空間での考察

連続空間の話を格子空間でも考える。

$$H(x) \quad \to \quad H^{(L)}(x) \doteq \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{p}\in\Gamma}\hat{E}f_\pi(\hat{E}+\hat{m})F_\pi(\hat{q}^2)\frac{1}{2\tilde{E}}e^{-Et+i\vec{p}\cdot\vec{x}}$$

$$D(t) \quad \to \quad D^{(L)}(t) := -\frac{m_\pi^2}{3!}\sum_{\vec{x}\in\mathbb{L}^3}|\vec{x}|^2 H^{(L)}(x)$$

$$\tilde{H}(t,\vec{p}) \quad \to \quad \tilde{H}^{(L)}(t,\vec{p}) := \sum_{\vec{x}\in\mathbb{L}^3}H^{(L)}(x)\cos(\vec{p}\cdot\vec{x})$$

$$R(t) \quad \to \quad R^{(L)}(t) := \frac{D^{(L)}(t)}{\tilde{H}^{(L)}(t,\vec{0})}$$

ここで格子修正した関係式を用いた。

$$\langle 0|A_4(0)|\pi(\vec{p})\rangle = \hat{E}f_\pi;\quad \left\langle \pi(\vec{p})\middle|J_4(0)\middle|\pi(\vec{0})\right\rangle = (\hat{E}+\hat{m})F_\pi(\hat{q}^2);\quad \left.\frac{1}{\hat{p}_0^2-\hat{E}^2}\right|_{p_0\to E} = \frac{1}{2\tilde{E}}\frac{1}{p_0-E}$$

格子空間での考察

よって格子空間で $R(t)$ を構成すると

$$R^{(L)}(t) := \frac{D^{(L)}(t)}{\tilde{H}^{(L)}(t,\vec{0})} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^{(L)}(t) c_n$$

ここで

$$\beta_n^{(L)}(t) = -\frac{m_\pi^2}{3!} \sum_{\vec{x}\in\mathbb{L}^3} |\vec{x}|^2 I_n(x), \qquad I_n(x) = \frac{1}{L^3} \sum_{\vec{p}\in\Gamma} \frac{\hat{E}}{\tilde{E}} \frac{\tilde{m}}{\hat{m}} \frac{\hat{E}+\hat{m}}{2\hat{m}} \left(\frac{\hat{q}^2}{m_\pi^2}\right)^n e^{-(E-m_\pi)t} \cos(\vec{p}\cdot\vec{x})$$

つまり

$$\begin{aligned} R^{(L)}(t) &= \beta_0^{(L)} + \beta_1^{(L)}(t) c_1 + (c_n, n \geq 2 \ \text{error}) \\ c_1 &= \left(R^{(L)}(t) - \beta_0^{(L)}\right)/\beta_1^{(L)}(t) + (\text{error}) \end{aligned}$$

→ $R^{(L)}(t)$：格子 QCD 計算　$\beta_0^{(L)}, \beta_1^{(L)}(t)$：既知の値

誤差の低減

〇有限体積効果を抑える方法

有限体積効果を減らすために、$0 \leq \xi \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の積分範囲 ξL を導入し（$0 \leq \xi \leq \dfrac{1}{2}$ の場合、範囲は球形になる）

$$D_k^{(L,\xi)}(t) := (-1)^k \frac{m_\pi^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{|\vec{x}| \leq \xi L} |\vec{x}|^{2k} H^{(L)}(x)$$

を定義する。これは

$$\frac{D_k^{(L,\xi)}(t)}{\tilde{H}^{(L)}(t, \vec{0})} \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n}^{(L,\xi)}(t) c_n \qquad \beta_{k,n}^{(L,\xi)}(t) = (-1)^k \frac{m_\pi^{2k}}{(2k+1)!} \sum_{|\vec{x}| \leq \xi L} |\vec{x}|^{2k} I_n(x)$$

を通して c_n と関係する.

誤差の低減

○ c_2 による系統誤差 (コンタミ) を抑える方法

$D_1^{(L,\xi)}(t)$ と $D_2^{(L,\xi)}(t)$ の両方を使って、比率 $R^{(L,\xi)}(t)$ を構築する。

$$R^{(L,\xi)}(t) := \frac{f_1 D_1^{(L,\xi)}(t) + f_2 D_2^{(L,\xi)}(t)}{\tilde{H}^{(L)}(t,\vec{0})} + h$$
$$\doteq (f_1\beta_{1,0}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,0}^{(L,\xi)} + h) + (f_1\beta_{1,1}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,1}^{(L,\xi)})c_1 + (f_1\beta_{1,2}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,2}^{(L,\xi)})c_2 + \cdots$$

ここでパラメータ f_1, f_2, h は、c_0 項と c_2 項を除去するように選択される。

$$f_1\beta_{1,0}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,0}^{(L,\xi)} + h = 0 \qquad f_1\beta_{1,1}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,1}^{(L,\xi)} = 1 \qquad f_1\beta_{1,2}^{(L,\xi)} + f_2\beta_{2,2}^{(L,\xi)} = 0$$

これらの条件の下で $R^{(L,\xi)}(t)$ は

$$R^{(L,\xi)}(t) \doteq c_1 + \sum_{n=3}\left(\sum_{k=1,2} f_k \beta_{k,n}^{(L,\xi)}(t)\right)c_n \qquad (\text{for large } t)$$