行列正則化の一般化

筑波大学素粒子論研究室　M2　菅野聡
中間発表　7/16

足立宏幸さん、伊敷吾郎さん、松本高興さん(DIAS)との共同研究
Phys.Rev.D 103,126003(2021)[arXiv:hep/th 2103.09967v1]

イントロ

- 弦理論は摂動論的な理解しかできて無く、完全な定式化はわかっていない

候補

行列模型

行列模型は行列を用いた理論
行列サイズの無限大の極限をとると弦理論を再現すると予想される

IIB型超弦理論の作用

$$S = \int d^2\sigma \left(\frac{1}{4} \{X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma)\}^2 + \bar{\Psi}(\tau,\sigma)\Gamma_\mu\{X^\mu(\tau,\sigma), \Psi(\tau,\sigma)\} \right)$$

行列正則化

IKKT行列模型

$$S = \mathrm{Tr}\left(-\frac{1}{4}[X^\mu, X^\nu]^2 + i\bar{\Psi}\Gamma_\mu[X^\mu, \Psi] \right)$$

行列模型が弦理論の弦やブレーン
をどのように含むかを知るために、
行列正則化の研究が有効

- 行列模型は弦理論を行列正則化することで得られる

空間M上の関数からN × N行列への線形写像T_Nが次を満たすとき行列正則化という

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}|T_N(f)T_N(g)-T_N(fg)|=0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty}|iN[T_N(f),T_N(g)]-T_N(\{f,g\})|=0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f)=\frac{1}{2\pi}\int_M \omega f$$

無限自由度の関数をいい性質を保ちながら有限自由度の行列に近似している

本研究では

関数
(電荷を持たない場)

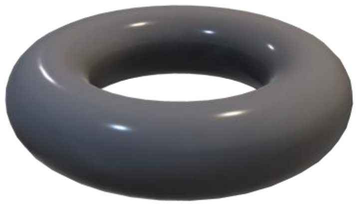
拡張 →

電荷を持つ場

- ブレーンなど行列模型の観点からより深く理解するには関数だけでは不十分
- 電荷を持つ場の理論を対称性と相性がいい形式で正則化ができる

Berezin-Toeplitz量子化

- Berezin-Toeplitz量子化は行列正則化の手法の一つで次のように考える
- 以降簡単のため2次元の空間Mを考える



$$X = \left(\qquad \right)$$

- 2次元の対象と行列の関係を見る。
- 概要(雰囲気)

関数fを行列としてみる $\xrightarrow{\text{有限に射影}}$ $N \times N$行列$T_N(f)$を得る

関数を行列としてみたい

- 行列はベクトル空間の間の線形写像

$$A: V \to V' \quad (V, V': vector\ space)$$

- 関数をベクトル空間の間の線形写像としてみればいい

$$V = V' = \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持つ} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix}$$

としてやって、関数$f(x)$をかける操作をfとしてやると

$$f: \psi(x) \longmapsto f(x)\psi(x)$$

$$f: \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持つ} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持つ} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix}$$

このとき Vは無限次元になっているので、fは無限次元の正方行列のようになっている。

有限次元にしたい

- スピノルの空間の中で性質のいい有限次元の部分空間に射影する
- 性質のいい有限次元空間とはディラック作用素のゼロモード
- スピノルに作用するディラック作用素は

$$D\psi = i\gamma^{\alpha}(\partial_{\alpha} + \Omega_{\alpha} - iNA_{\alpha})\psi \qquad (\Omega_{\alpha}: spin\ connection)$$

このとき指数定理と消滅定理により(十分Nが大きいとき)

$$(number\ of\ zero\ modes\ ) \equiv \mathrm{dim(KerD)} \\ = N$$

となり、有限次元の部分空間が得られる

(このとき$U(1)$電荷を持たせた意味が出る)

構成法

M上の関数fに対して$N \times N$行列$T_N(f)$を次のように対応させる。

$$T_N(f) = \Pi f \Pi : \mathrm{KerD} \to \mathrm{Ker}D$$

このときΠは次のような射影である

$$\Pi : \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持つ} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix} \to \mathrm{KerD}$$

また成分で書くと

$$(T_N(f))_{IJ} = \int_M \omega \psi_I^\dagger \cdot f \psi_J$$

行列正則化になってるか

二つの関数f,gに対する行列正則化$T_N(f),T_N(g)$の積を

$$T_N(f)T_N(g) = T_N(fg) - \frac{1}{2N} T_N\left((g^{\alpha\beta}+iW^{\alpha\beta})\partial_\alpha f \partial_\beta g\right) + O(1/N^2)$$

と書ける。ここで、$W^{\alpha\beta}$はポアソンテンソル

これらを用いて次が示せる。

$$(1).\ \lim_{N\to\infty} |T_N(f)T_N(g) - T_N(fg)| = 0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty} |iN[T_N(f),T_N(g)] - T_N(\{f,g\})| = 0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(f) = \frac{1}{2\pi}\int_M \omega f$$

ポアソン括弧

$$\{f,g\} = W^{\alpha\beta}\partial_\alpha f \partial_\beta g$$

行列正則化の一般化

- ここまでのまとめ

$U(1)$電荷Nを持つスピノルの空間
（無限次元ベクトル空間）

関数f（無限正方行列）

$U(1)$電荷Nを持つスピノルの空間
（無限次元ベクトル空間）

射影

射影

KerD
（N次元ベクトル空間）

$T_N(f)$（$N \times N$正方行列）

KerD
（N次元ベクトル空間）

- これの一般化を行う

$U(1)$電荷Nを持ち、ゲージ群Gの表現E
のスピノルの空間
(無限次元ベクトル空間)

写像φ(無限長方行列)

$U(1)$電荷Nを持ち、ゲージ群G'の表現E'
のスピノルの空間
(無限次元ベクトル空間)

射影

射影

$\mathrm{KerD}^{(E)}$
(有限次元ベクトル空間)

$T_N^{(E',E)}(\varphi)$(有限の長方行列)

$\mathrm{KerD}^{(\mathrm{E}')}$
(有限次元次元ベクトル空間)

Ex.任意のゲージ群、E = (自明表現)、E'は任意の表現
　→ φは表現E'のスカラー場
Ex.ゲージ群をU(n)として$E = E'$ =(基本表現)
　→ φはadjoint表現になる
Ex.ゲージ群をU(1)として$E = \big($自明表現$\big)$, E' = (電荷Q)
　→ φは電荷Qを持つスカラー場

- さっきまでのものを拡張

$$\forall x \in M, f(x) \in \mathbb{C} \Rightarrow \forall x \in M, \varphi(x) \in \mathrm{Hom}(E, E')$$

ここからφを次のような線形写像と考えられる

$$V = \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持ち表現E} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix}, V' = \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持ち表現E'} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix}$$

としてやって、写像$\varphi(x)$をかける操作をφとしてやると

$$\varphi: \psi(x) \longmapsto \varphi(x)\psi(x)$$

$$f: \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持ち表現E} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} U(1)\text{電荷}N\text{を持ち表現E'} \\ \text{スピノルの空間} \end{bmatrix}$$

このとき V, V'は無限次元になっているので、φは無限次元の行列のようになっている。

V, V'は次元が異なるのでφは長方行列みたいな感じ

有限次元にしたい

- スピノルに作用するディラック作用素は

$$D^{(E)}\psi = i\gamma^{\alpha}\left(\partial_{\alpha} + \Omega_{\alpha} - iNA_{\alpha} - iA^{(E)}\right)\psi \qquad (\Omega_{\alpha}: spin\ connection)$$

ここで、$A^{(E)}$は表現Eに対応するゲージ群のゲージ場

このとき指数定理と消滅定理により(十分Nが大きいとき)

$$(number\ of\ zero\ modes\ ) \equiv \mathrm{dim}(\mathrm{KerD}^{(E)}) = d^{(E)}N + c^{(E)}$$

となり、有限次元の部分空間が得られる

このとき

$$d^{(E)} = (\text{表現の次元}) \quad c^{(E)} = \frac{1}{2\pi}\int F^{(E)} \ (\text{第一チャーン数})$$

構成法

EからE'への写像$\varphi(x)$に対して$(d^{(E')}N+c^{(E')})\times(d^{(E)}N+c^{(E)})$行列$T_N^{(E',E)}(\varphi)$を次のように対応させる。

$$T_N^{(E',E)}(\varphi)=\Pi^{(E')}\varphi\Pi^{(E)}:\mathrm{KerD}^{(E)}\to\mathrm{KerD}^{(E')}$$

このとき$\Pi^{(E)}$は次のような射影である

$$\Pi^{(E)}:\begin{bmatrix}U(1)\text{電荷}N\text{を持ち表現E}\\ \text{スピノルの空間}\end{bmatrix}\to\mathrm{KerD}^{(E)}$$

また成分で書くと$\chi_{I'}\in\mathrm{Ker}D^{(E')},\psi_J\in\mathrm{Ker}D^{(E)}$

$$(T_N(f))_{I'J}=\int_M\omega\chi_{I'}^{\dagger}\cdot\varphi\psi_J$$

行列正則化になってるか

二つの写像φ,φ'に対する行列正則化$T_N^{(E'',E')}(\varphi'),T_N^{(E',E)}(\varphi)$の積を

$$T_N^{(E'',E')}(\varphi')T_N^{(E',E)}(\varphi)=T_N^{(E'',E)}(\varphi'\varphi)-\frac{1}{2N}T_N\left((g^{\alpha\beta}+iW^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\varphi'\nabla_\beta\varphi\right)+O(1/N^2)$$

と書ける。ここで、$W^{\alpha\beta}$はポアソンテンソル

$$\nabla_\beta\varphi=\partial_\beta\varphi-iA_\beta^{(E')}\varphi+i\varphi A_\beta^{(E)}$$

これらを用いて次が示せる。

$$(1).\ \lim_{N\to\infty}\left|T_N^{(E,E')}(\varphi)T_N^{(E',E'')}(\varphi')-T_N^{(E,E'')}(\varphi\varphi')\right|=0$$

$$(2).\ \lim_{N\to\infty}\left|iN[T_N(f1),T_N(\varphi)]^{(E,E')}-T_N^{(E,E')}(\{f,\varphi\})\right|=0$$

$$(3).\ \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\mathrm{Tr}T_N(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_M\omega\,\mathrm{tr}_E\varphi\quad(\varphi\text{は}E\text{の間の写像})$$

一般化ポアソン括弧と一般化交換関係

$$\{f,\varphi\}=W^{\alpha\beta}\partial_\alpha f\nabla_\beta\varphi$$

$$[T_N(f1),T_N(\varphi)]^{(E,E')}\equiv T_N^{(E',E')}(f1_{E'})T_N^{(E',E)}(\varphi)-T_N^{(E',E)}(\varphi)T_N^{(E,E)}(f1_E)$$

まとめと展望

- 行列正則化：関数→行列の写像

  Berezin-Toeplitz量子化などを用いる
- 行列正則化の一般化として任意の背景ゲージ場と結合するスカラー場の正則化を行った

  ⇒ 正則化されたラプラシアンの構成も行った

- 今後はテンソル場、高次元の拡張
- ゲージ場への拡張 ⇒ QCDの正則化？ 量子重力？
- 南部括弧の行列正則化 ⇒ ループ空間？

ご清聴ありがとうございました