

# Lattice QCD Equation of State at Finite Chemical Potential from an Alternative Expansion Scheme

*S. Borsányi, Z. Fodor, J. N. Guenther, R. Kara, S. D. Katz, P. Parotto, A. Pásztor, C. Ratti and K. K. Szabó*  
Phys Rev Lett, **126**, 232001 (2021)

Hiroshi Ohno

Journal Club  
June 18, 2021

# 概要

- 有限密度QCDの状態方程式を化学ポテンシャルの展開で計算する際の新しい方法を提案
- 単純なTaylor展開より収束性が向上
- これまでよりも高い密度領域 ( $\frac{\mu_B}{T} \leq 3.5$ ) まで計算

# 背景

- QCD状態方程式
  - QCDの相構造を理解する上で重要
  - 重イオン衝突実験の結果を説明するための流体力学シミュレーション等に用いられる
- 有限密度QCD
  - クォーク化学ポテンシャル  $\mu > 0$
  - フェルミオン行列式が複素数  $\rightarrow \det M(\mu) e^{-S} / Z$  が確率とみなせない
    - $\rightarrow$  そのままではモンテカルロシミュレーションができない(符号問題)
- $\mu = 0$ の周りでのTaylor展開
  - 符号問題を回避する方法の一つ HotQCD Collab., Phys. Rev. D 95, 054504 (2017).
  - QCD状態方程式はバリオン化学ポテンシャル  $\mu_B$  の6次まで計算されている
  - $\mu_B \simeq 2.5$  くらいまでうまくいくが、それ以上は困難(非物理的な振る舞いが現れる)
    - より高次の展開係数が必要だが、ノイズが大きく計算が容易でない
    - 高次の補正項の温度依存性はより複雑になり、展開の次数を少し増やしても収束性が改善しない

# Taylor展開

- 圧力

$$\frac{P(T, \hat{\mu}_B)}{T^4} = \sum_{n=0} \frac{1}{(2n)!} \chi_{2n}^B(T, 0) \hat{\mu}_B^{2n}, \quad \hat{\mu}_B \equiv \frac{\mu_B}{T}$$

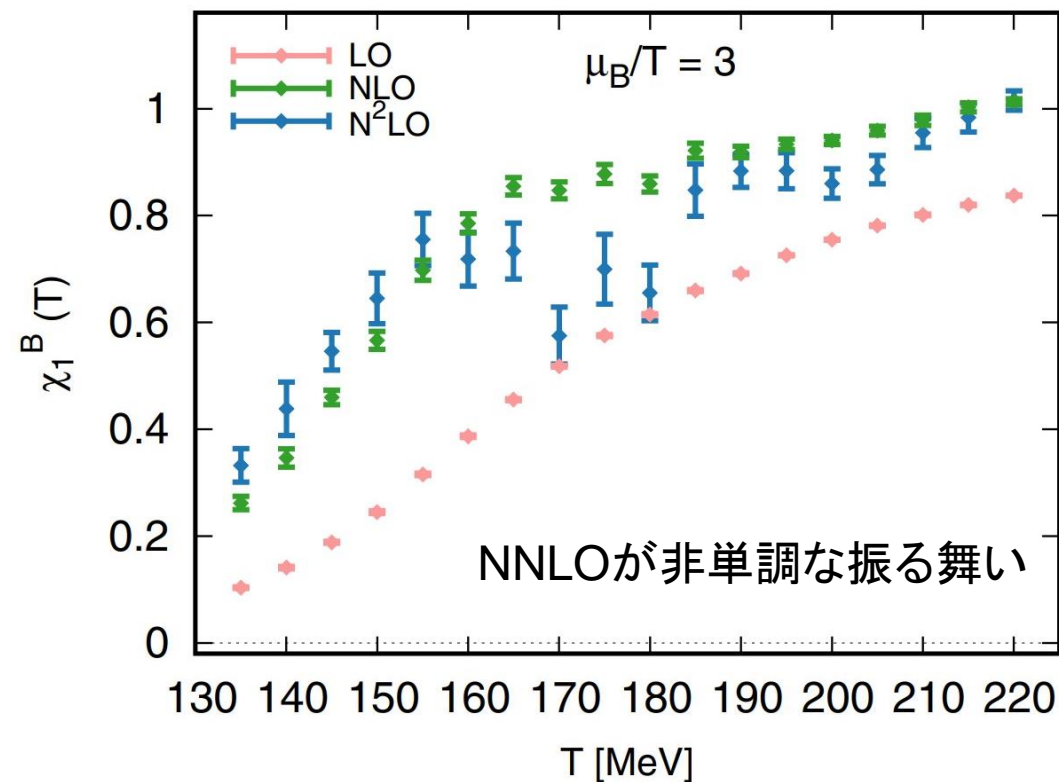
- 展開係数

$$\chi_n^B(T, \hat{\mu}_B) = \frac{\partial^n P(T, \hat{\mu}_B)}{\partial \hat{\mu}_B^n T^4} = \frac{1}{VT^3} \frac{\partial^n}{\partial \hat{\mu}_B^n} \ln Z(T, \hat{\mu}_B)$$

- バリオン数密度

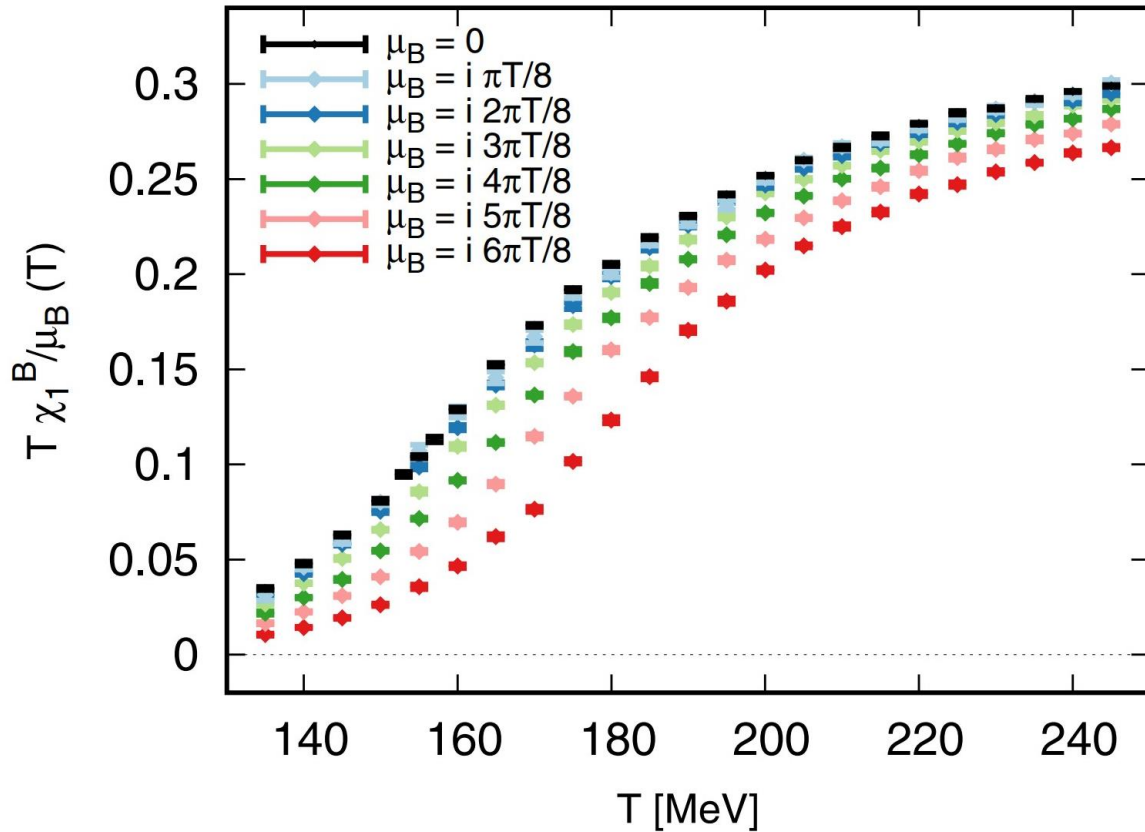
$$\frac{n_B(T, \hat{\mu}_B)}{T^3} \equiv \chi_1^B(T, \hat{\mu}_B) = \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_B} \frac{P(T, \hat{\mu}_B)}{T^4} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}_B} \left[ \chi_0^B(T, 0) + \frac{1}{2} \chi_2^B(T, 0) \hat{\mu}_B^2 + \frac{1}{4!} \chi_4^B(T, 0) \hat{\mu}_B^4 + \frac{1}{6!} \chi_6^B(T, 0) \hat{\mu}_B^6 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} = \chi_2^B(T, 0) + \frac{1}{6} \chi_4^B(T, 0) \hat{\mu}_B^2 + \frac{1}{120} \chi_6^B(T, 0) \hat{\mu}_B^4 + \dots$$

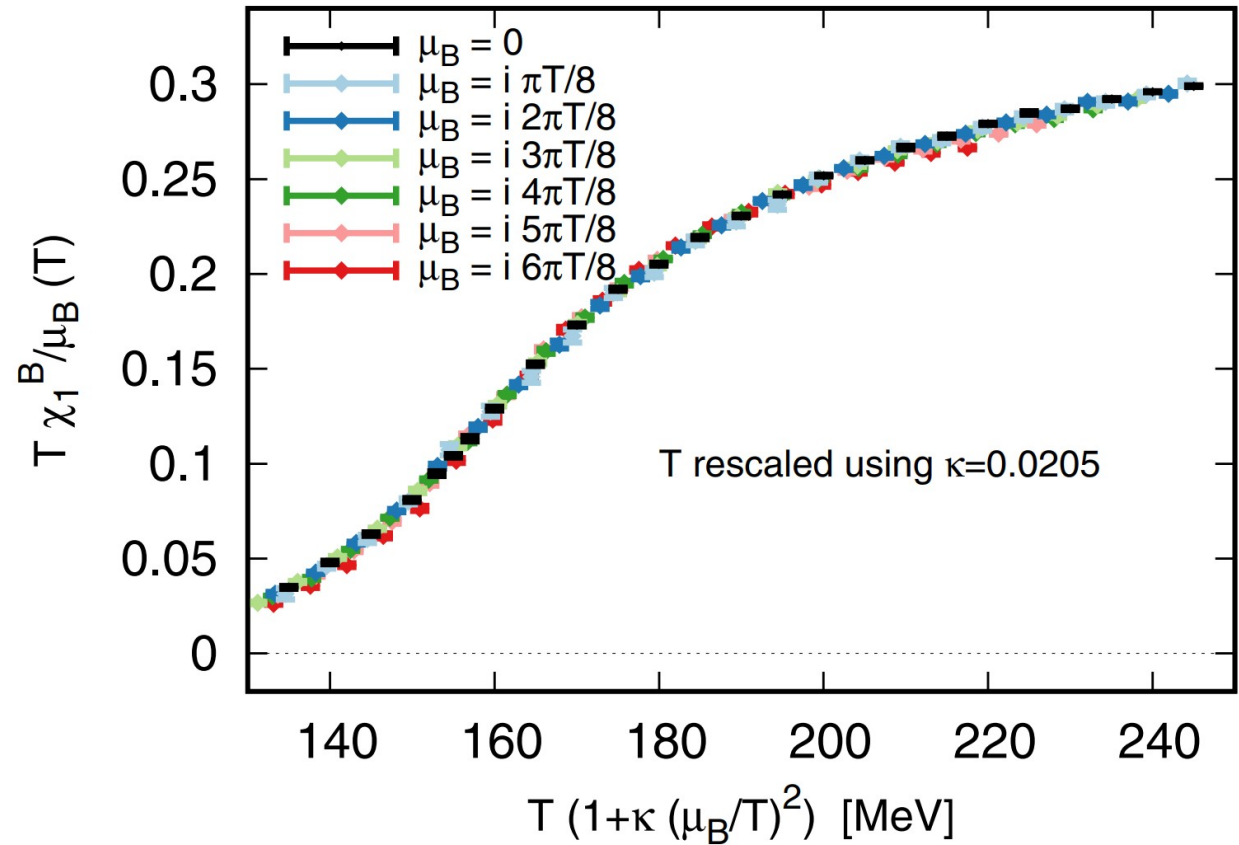


# $T$ と $\mu_B$ の関係

$$\frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} \xrightarrow[\mu \rightarrow 0]{} \chi_2^B(T, 0)$$



$$\frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} = \chi_2^B(T', 0), \quad T' = T(1 + \kappa \hat{\mu}_B^2)$$



# 新しい展開方法

- 温度の  $\mu_B$  依存性の拡張

$$T' = T \left[ 1 + \kappa_2^{BB}(T) \hat{\mu}_B^2 + \kappa_4^{BB}(T) \hat{\mu}_B^4 + O(\hat{\mu}_B^6) \right]$$

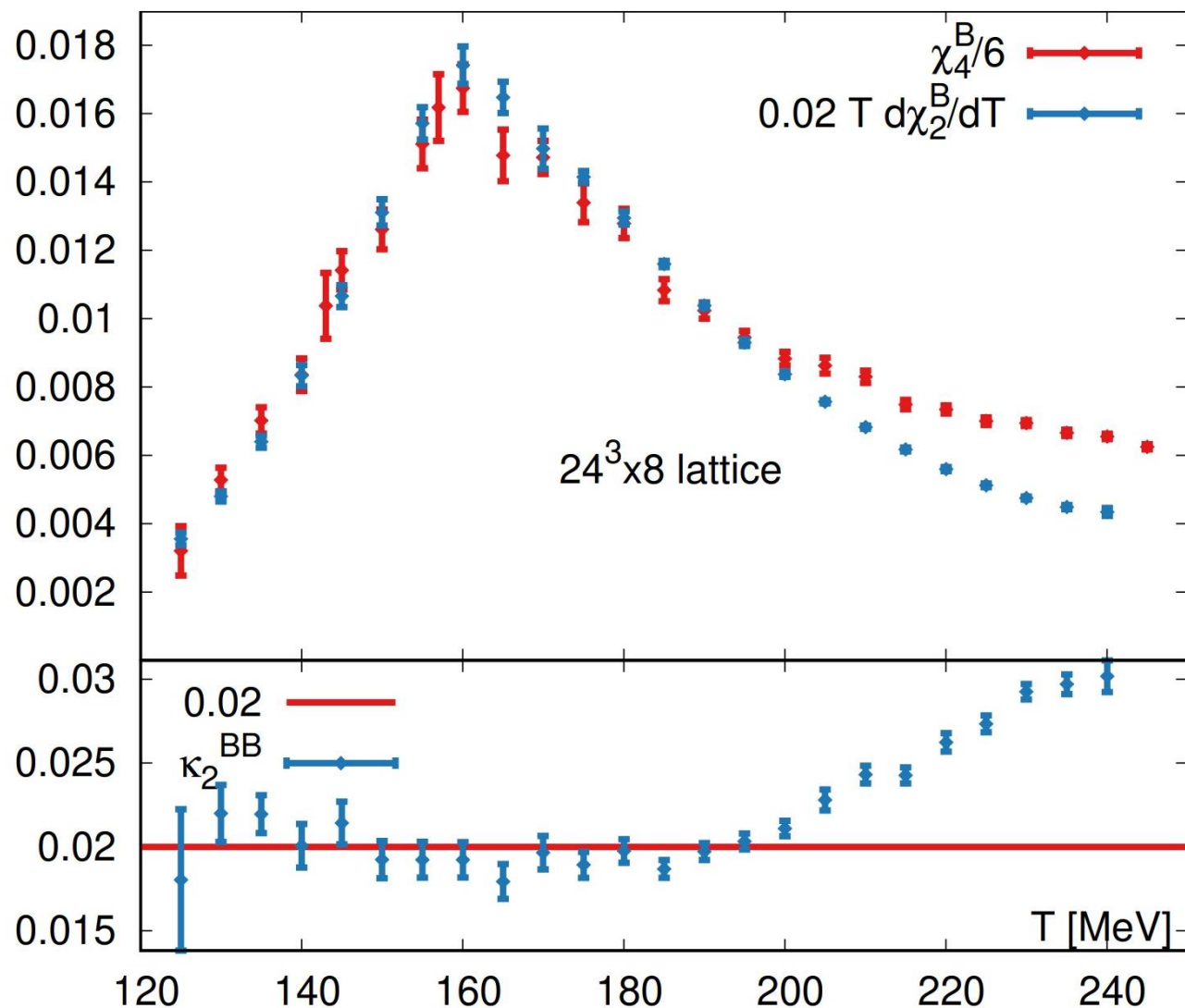
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} &= \chi_2^B(T', 0) = \chi_2^B(T, 0) + \frac{d\chi_2^B(T, 0)}{dT} (T' - T) + \frac{1}{2} \frac{d^2\chi_2^B(T, 0)}{dT^2} (T' - T)^2 + \dots \\ &= \chi_2^B(T, 0) + \boxed{T\kappa_2^{BB}(T) \frac{d\chi_2^B(T, 0)}{dT}} \hat{\mu}_B^2 + \boxed{\left[ T\kappa_4^{BB}(T) \frac{d\chi_2^B(T, 0)}{dT} + \frac{1}{2} T^2 \left( \kappa_2^B(T) \right)^2 \frac{d^2\chi_2^B(T, 0)}{dT^2} \right]} \hat{\mu}_B^4 + \dots \end{aligned}$$

- 通常のTaylor展開

$$\frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} = \chi_2^B(T, 0) + \boxed{\frac{1}{6} \chi_4^B(T, 0)} \hat{\mu}_B^4 + \boxed{\frac{1}{120} \chi_6^B(T, 0)} \hat{\mu}_B^6 + \dots$$

$$\kappa_2^{BB}(T) = \frac{1}{6T} \frac{\chi_4^B(T, 0)}{\chi_2^{B'}(T, 0)}, \quad \kappa_4^{BB}(T) = \frac{1}{360T \left( \chi_2^{B'}(T, 0) \right)^3} \left[ 3\chi_2^{B'}(T, 0)\chi_6^B(T, 0) - 5\chi_2^{B''}(T, 0) \left( \chi_4^B(T, 0) \right)^2 \right]$$

# $\kappa_2^{BB}(T)$

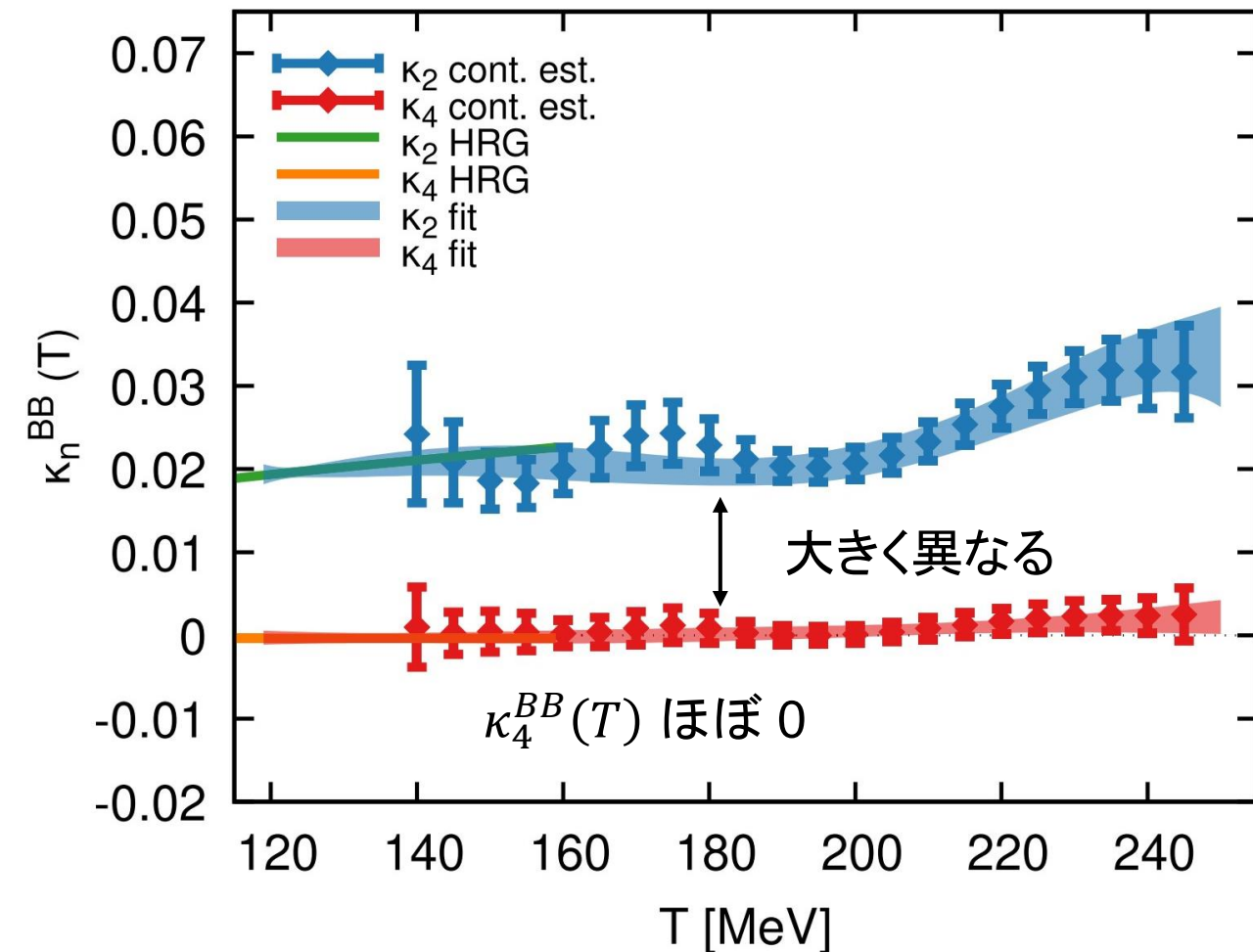


$$\kappa_2^{BB}(T) = \frac{1}{6T} \frac{\chi_4^B(T, 0)}{\chi_2^{B'}(T, 0)}$$

Taylor展開の係数は温度に大きく依存する

$\kappa_2^{BB}(T)$  は温度依存性が小さい

# $\kappa_2^{BB}(T)$ と $\kappa_4^{BB}(T)$



$$\kappa_4^{BB}(T) = \frac{1}{360T (\chi_2^{B'}(T,0))^3} \left[ 3\chi_2^{B'}(T,0)\chi_6^B(T,0) - 5\chi_2^{B''}(T,0) (\chi_4^B(T,0))^2 \right]$$

上式で  $\kappa_4^{BB}(T)$  を計算するには正確な  $\chi_6^B(T,0)$  の値が必要

代わりに、虚数化学ポテンシャルを使って  $\chi_1^B(T, \mu_B)$  を計算し、 $\frac{\chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)}{\hat{\mu}_B} = \chi_2^B(T', 0)$  から  $T'$  を決める



$$\Pi(T, \hat{\mu}_B) \equiv \frac{T'(T, \hat{\mu}_B) - T}{T \hat{\mu}_B^2} = \kappa_2^{BB}(T) + \kappa_4^{BB}(T) \hat{\mu}_B^2 + \dots$$



# 熱力学量

$$\hat{n}_B(T, \hat{\mu}_B) \equiv \frac{n_B(T, \hat{\mu}_B)}{T^3} = \chi_1^B(T, \hat{\mu}_B)$$

$$\hat{P}(T, \hat{\mu}_B) \equiv \frac{P(T, \hat{\mu}_B)}{T^4} = \hat{P}(T, 0) + \int_0^{\hat{\mu}_B} d\hat{\mu}'_B \hat{n}_B(T, \hat{\mu}'_B)$$

$$\begin{aligned} \hat{s}(T, \hat{\mu}_B) &\equiv \frac{s(T, \hat{\mu}_B)}{T^3} \\ &= 4\hat{P}(T, \hat{\mu}_B) + T \frac{\partial \hat{P}(T, \hat{\mu}_B)}{\partial T} - \hat{\mu}_B \hat{n}_B(T, \hat{\mu}_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(T, \hat{\mu}_B) &\equiv \frac{\epsilon(T, \hat{\mu}_B)}{T^4} \\ &= \hat{s}(T, \hat{\mu}_B) - \hat{P}(T, \hat{\mu}_B) + \hat{\mu}_B \hat{n}_B(T, \hat{\mu}_B) \end{aligned}$$

$\hat{\mu}_B = 3.5$  まで計算することが可能になった

