Axail Vector Form Factors from Lattice QCD that Satify the PCAC Relation

Phys. Rev. Lett. 124, 072002 (2020)

Yong-Chull Jang, Rajan Guputa, Boram Yoon, Tanmoy Bhattacharya

概要:

Lattice QCDで得られる$G_A(Q^2), \widetilde{G}_P(Q^2), G_P(Q^2)$ の問題を解決する解析方法の提案

Axialvector and pseudoscalar form factors

$G_A(Q^2)$: Axial(vector) form factor
$\tilde{G}_P(Q^2)$: Induced pseudoscalar form factor
$G_P(Q^2)$: Pseudoscalar form factor

$$\langle N(p)|A_\mu(0)|N(p')\rangle = \overline{u}_N(p)\left(\gamma_\mu\gamma_5 G_A(Q^2) + \frac{iq_\mu}{2M_N}\gamma_5\tilde{G}_P(Q^2)\right)u_N(p')$$
$$\langle N(p)|P(0)|N(p')\rangle = \overline{u}_N(p)\gamma_5 G_P(Q^2)u_N(p')$$

$A_\mu = \overline{u}\gamma_\mu\gamma_5 d$, $P = \overline{u}\gamma_5 d$, $u_N(p)$: 運動量 p の核子スピノール

$Q^2 = Q^2_{\text{Eucl}} = 2M_N(E_N(p) - M_N)$: spacelike momentum transfer

Partially Conserved Axial(vector) Current (PCAC) relation

$$2m_q P = \partial_\mu A_\mu \quad (m_q{=}m_u{=}m_d)$$

Form factor を使うと

$$2m_q G_P(Q^2) = 2M_N G_A(Q^2) - \frac{Q^2}{2M_N}\tilde{G}_P(Q^2)$$

Axailvector form factorsの問題

① PCAC relation が満たされない

PCAC relation変形版
$$\frac{m_q G_P(Q^2)}{M_N G_A(Q^2)} + \frac{Q^2}{4M_N^2}\frac{\widetilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)} = 1$$

② 小さいQ^2でPion Pole Dominance (PPD) Modelと合わない

PPD
$$\widetilde{G}_P(Q^2) = \frac{4M_N^2 G_A(Q^2)}{M_\pi^2 + Q^2} \quad \text{or} \quad \frac{\widetilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)}\frac{M_\pi^2 + Q^2}{4M_N^2} = 1$$

PPDは実験とは一致 [MuCap, PRL110:012504(2013);PRC91:055502(2015), Choi *et al.*, PRL71:3927(1993)]

③ A_4とA_iの計算に大きな違いがある

④ r_Aが実験値より小さい

$$r_A = \sqrt{\langle r_A^2 \rangle} = \sqrt{-\frac{1}{6}\frac{dG_A(Q^2)}{dQ^2}}\Bigg|_{Q^2=0}$$

実験値∼0.67fm ↔ lattice∼0.5fm

従来の解析方法($\mathcal{S}_{\text{2pt}}$)

核子２点関数

$$C_p^{\text{2pt}}(t) = \text{Tr}\left[\mathcal{P}_+\langle 0|N(t;p)\overline{N}(0;p)|0\rangle\right] = \sum_{i=0}^{N^{\text{2pt}}} B_i^2(p)e^{-E_i(p)t}$$

$\mathcal{P}_+ = (1+\gamma_4)/2$, $B_i(p)$:核子演算子規格化定数, i:状態のラベル

$$E_0(p) = E_N(p),\ E_0(0) = M_N,\ M_i \equiv E_i(0)$$

核子３点関数

$$C_{\mathcal{O},p}^{\text{3pt}}(t,\tau) = \text{Tr}\left[\mathcal{P}_{53}\langle 0|N(\tau;0)\mathcal{O}(t;q)\overline{N}(0;p)|0\rangle\right]$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N^{\text{3pt}}} B_i(0)B_j(p)\overline{\langle N_i(0)|\mathcal{O}|N_j(p)\rangle}e^{-M_i(\tau-t)}e^{-E_j(p)t}$$

$\mathcal{O} = A_\mu$ or P, $\mathcal{P}_{53} = (1+\gamma_4)\gamma_3\gamma_5/2$, i,j:状態のラベル

$\mathcal{S}_{\text{2pt}}$解析

1. $N^{\text{2pt}} = 3$で$C_p^{\text{2pt}}(t)$フィット $\to$ $E_i(p), B_i(p)$ ($p=0$も含む)
2. $E_i(p), B_i(p)$を使って$N^{\text{3pt}} = 2$ 但し$(i,j)\neq(2,2)$ で$C_{\mathcal{O},p}^{\text{3pt}}(t,\tau)$フィット

$$\to \overline{\langle N_0(0)|\mathcal{O}|N_0(p)\rangle}$$

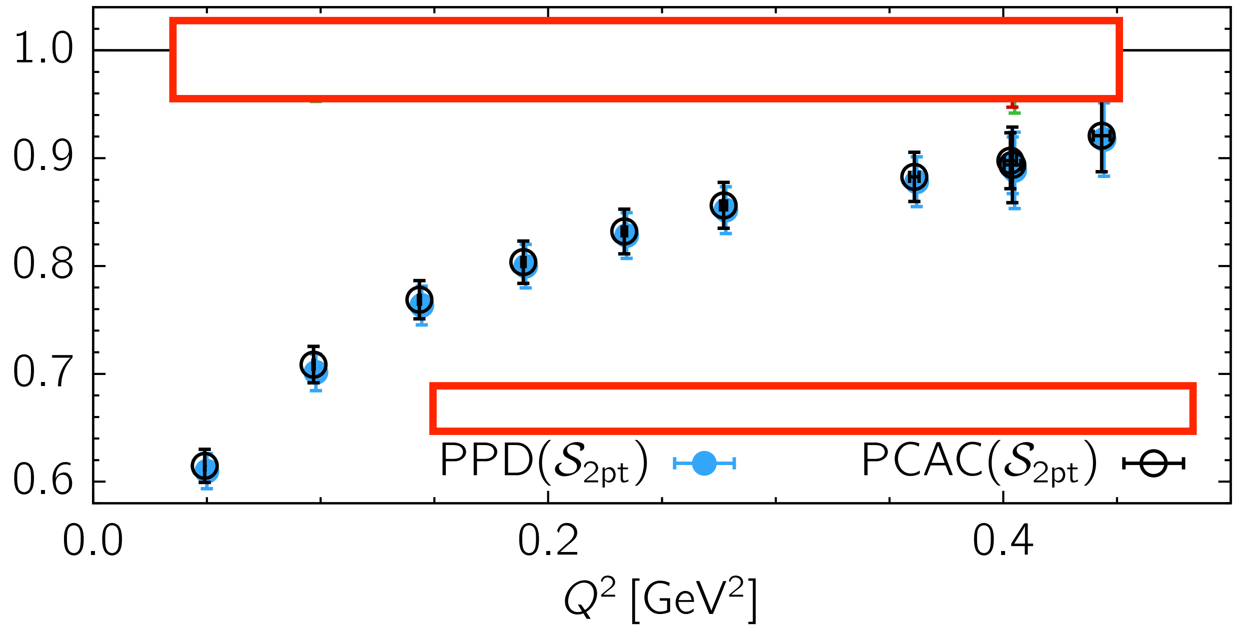
従来の解析方法(続き)

$\overline{\langle N_0(0)|\mathcal{O}|N_0(p)\rangle}$ とForm factorの関係 (共通のoverall定数を省く)

$\mathcal{O}$	$\overline{\langle N_0(0)\|\mathcal{O}\|N_0(p)\rangle}$
A_i	$-q_3 q_i \frac{\widetilde{G}_P(Q^2)}{2M_N} \quad (i=1,2)$
A_3	$(E_N(p)+M_N)G_A(Q^2) - q_3^2 \frac{\widetilde{G}_P(Q^2)}{2M_N}$
A_4	$iq_3\left[G_A(Q^2) - (E_N(p)-M_N)\frac{\widetilde{G}_P(Q^2)}{2M_N}\right]$
P	$iq_3 G_P(Q^2)$

$\mathcal{P}_{53}$ を使ったため A_i と A_3 が違う

問題①と② PCACとPPD



PCAC relation $$\frac{m_q G_P(Q^2)}{M_N G_A(Q^2)} + \frac{Q^2}{4M_N^2}\frac{\tilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)} = 1$$

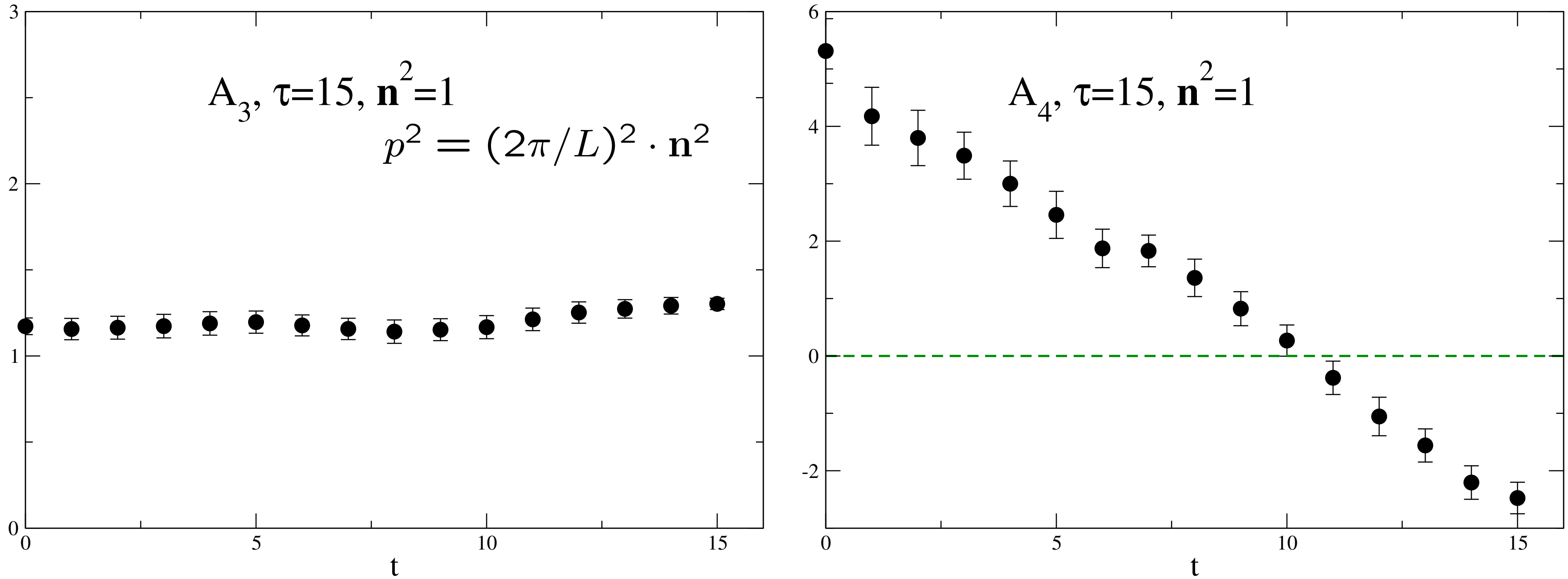
PPD $$\frac{\tilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)}\frac{M_\pi^2 + Q^2}{4M_N^2} = 1$$

- 従来の解析方法だとどちらも成り立たない ($\neq 1$)
- Q^2 が小さくなるほどズレが大きくなる
- 2つのズレは一致している $\longrightarrow$ 本質的に同じものを見ている?

問題③ A_3 と A_i の違い

例) $C^{\text{3pt}}_{\mathcal{O},p}(t,\tau)$ と $C^{\text{2pt}}_p(t)$ の適切な比

基底状態の t 依存性をなくし、比の値が $\overline{\langle N_0(0)|\mathcal{O}|N_0(p)\rangle}$



A_3: ほぼ定数 $\rightarrow$ $G_A(q^2), \widetilde{G}_P(q^2)$ を決定

A_4: t 依存 $\rightarrow$ 強烈な励起状態の影響 $\rightarrow$ 解析に使わない

有効理論を用いた議論 Oliver Bär ['19 筑波大セミナー, PRD99:054506(2019)]

- $C^{\text{3pt}}_{A_\mu,p}$ では $N_1(p) = N(\mathbf{p})\pi(0)$, $N_1(0) = N(\mathbf{p})\pi(-\mathbf{p})$ が大きな寄与
- $N(\mathbf{p})\pi(0), N(\mathbf{p})\pi(-\mathbf{p})$ を考慮した解析を行うと問題②,③が解決できる

新しい解析方法($\mathcal{S}_{A4}$)

核子２点関数

$$C_p^{\text{2pt}}(t) = \text{Tr}\left[\mathcal{P}_+\langle 0|N(t;p)\overline{N}(0;p)|0\rangle\right] = \sum_{i=0}^{N^{\text{2pt}}} B_i^2(p)e^{-E_i^{\text{2pt}}(p)t}$$

$\mathcal{P}_+ = (1+\gamma_4)/2$, $B_i(p)$:核子演算子規格化定数, i:状態のラベル

核子３点関数

$$C_{\mathcal{O},p}^{\text{3pt}}(t,\tau) = \text{Tr}\left[\mathcal{P}_{53}\langle 0|N(\tau;0)\mathcal{O}(t;q)\overline{N}(0;p)|0\rangle\right]$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N^{\text{3pt}}} A_i^{\mathcal{O}}(0)A_j^{\mathcal{O}}(p)\overline{\langle N_i(0)|\mathcal{O}(0)|N_j(p)\rangle}e^{-M_i(p)(\tau-t)}e^{-E_j(p)t}$$

$\mathcal{O} = A_\mu$ or P, $A_i^{\mathcal{O}}(p)$:核子演算子規格化定数, $\mathcal{P}_{53} = (1+\gamma_4)\gamma_3\gamma_5/2$, i,j:状態のラベル

$$i = 0: \quad E_0^{\text{2pt}}(p) = E_0(p), \; E_0^{\text{2pt}}(0) = M_0(p) = M_N, \; \underline{B_0(p) = A_0^{\mathcal{O}}(p)}$$

(明記されていないが)

$$i \neq 0: \quad E_i^{\text{2pt}}(p) \neq E_i(p) \neq M_i(p), \; B_i(p) \neq A_i^{\mathcal{O}}(p)$$

新しい解析方法(続き)

$$C_p^{2\text{pt}}(t) = \sum_{i=0}^{N^{2\text{pt}}} B_i^2(p) e^{-E_i^{2\text{pt}}(p)t}$$

$$C_{\mathcal{O},p}^{3\text{pt}}(t,\tau) = \sum_{i,j=0}^{N^{3\text{pt}}} A_i^{\mathcal{O}}(0) A_j^{\mathcal{O}}(p) \overline{\langle N_i(0)|\mathcal{O}(0)|N_j(p)\rangle} e^{-M_i(p)(\tau-t)} e^{-E_j(p)t}$$

$\mathcal{S}_{\text{A4}}$ 解析

1. $N^{2\text{pt}} = 3$ で $C_p^{2\text{pt}}(t)$ フィット $\rightarrow$ $E_0(p), B_0(p)$ ($p = 0$ も含む)
2. $E_0(p), B_0(p)$ を使って $N^{3\text{pt}} = 1$ で $C_{A_4,p}^{3\text{pt}}(t,\tau)$ フィット

   $$\rightarrow E_1(p), M_1(p), \overline{\langle N_0(0)|A_4|N_0(p)\rangle}$$

3. $E_0(p), B_0(p), E_1(p), M_1(p)$ を使って $N^{3\text{pt}} = 1$ で $C_{\mathcal{O},p}^{3\text{pt}}(t,\tau)$ フィット

   $$\rightarrow \overline{\langle N_0(0)|\mathcal{O}|N_0(p)\rangle}$$

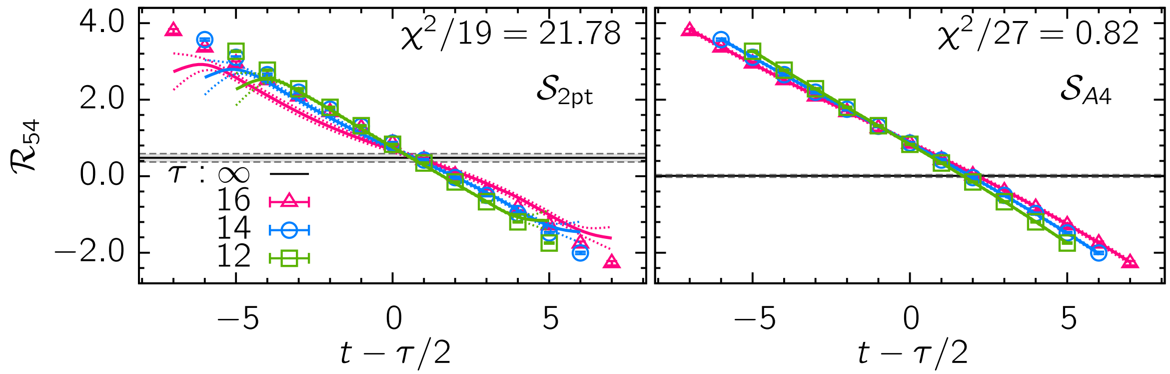
シミュレーションパラメーター

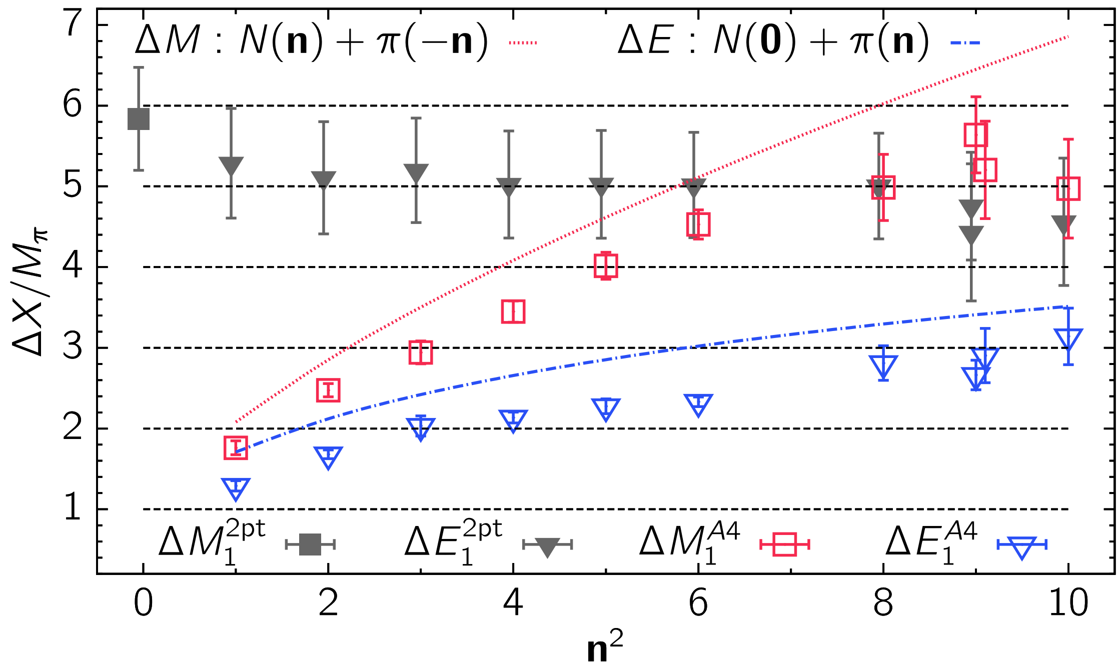
Clover クォーク on $N_f = 2+1+1$ HISQ ゲージ配位
$M_\pi = 0.138(1)$GeV, $L^3 \times T = 64^3 \times 96$, $a = 0.087$fm
測定数 165×10^3, 配位数 1290, $\tau = 12, 14, 16$

$M_1(p)$ と $E_1(p)$

$C^{3\mathrm{pt}}_{A_4,p}(t,\tau)$ 比 $(\mathbf{n}^2 = 1)$

$p^2 = (2\pi/L)^2 \cdot \mathbf{n}^2$





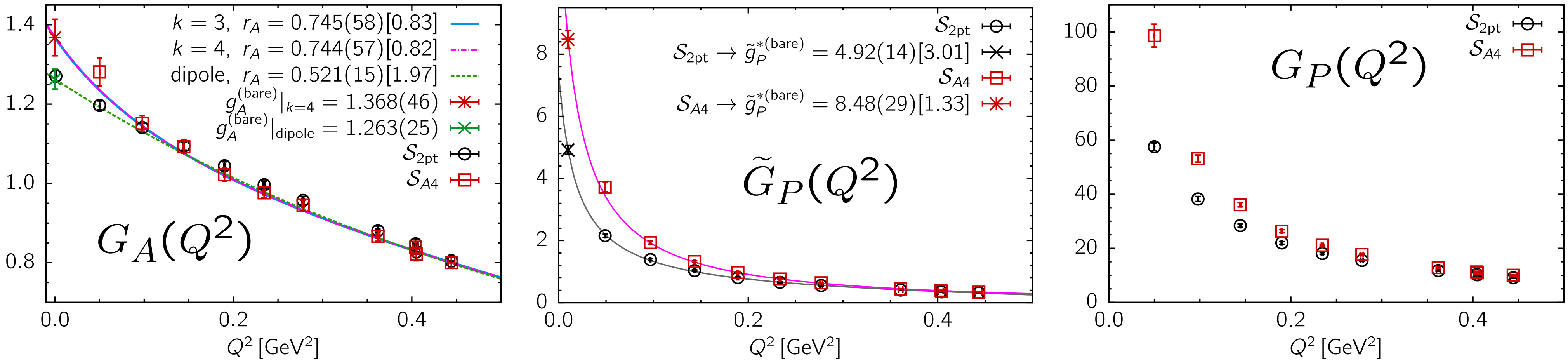
$$\Delta E_1^{2\mathrm{pt}}(p) = E_1^{2\mathrm{pt}}(p) - E_N(p) \gtrsim M_{N(1440)} - M$$

$$\Delta M_1(p) = M_1(p) - M_N \sim E_N(p) + E_\pi(p)$$

$$\Delta E_1(p) = E_1(p) - E_N(p) \sim M_N + E_\pi(p)$$

$\Delta M_1(p), \Delta E_1(p)$ は Oliver の予想と近い値

$\mathcal{S}_{2\text{pt}}$ と $\mathcal{S}_{A4}$ の比較



- $G_A(Q^2)$ は最小の Q^2 以外変化無し

  最小の Q^2 の値の変化により $r_A = 0.45(7)\text{fm} \to 0.74(6)\text{fm}$

  実験値を再現 (問題④)

  $Q^2 = 0$ から決めた $G_A(0) = 1.25(2) \to G_A(Q^2 \to 0) = 1.30(7)$

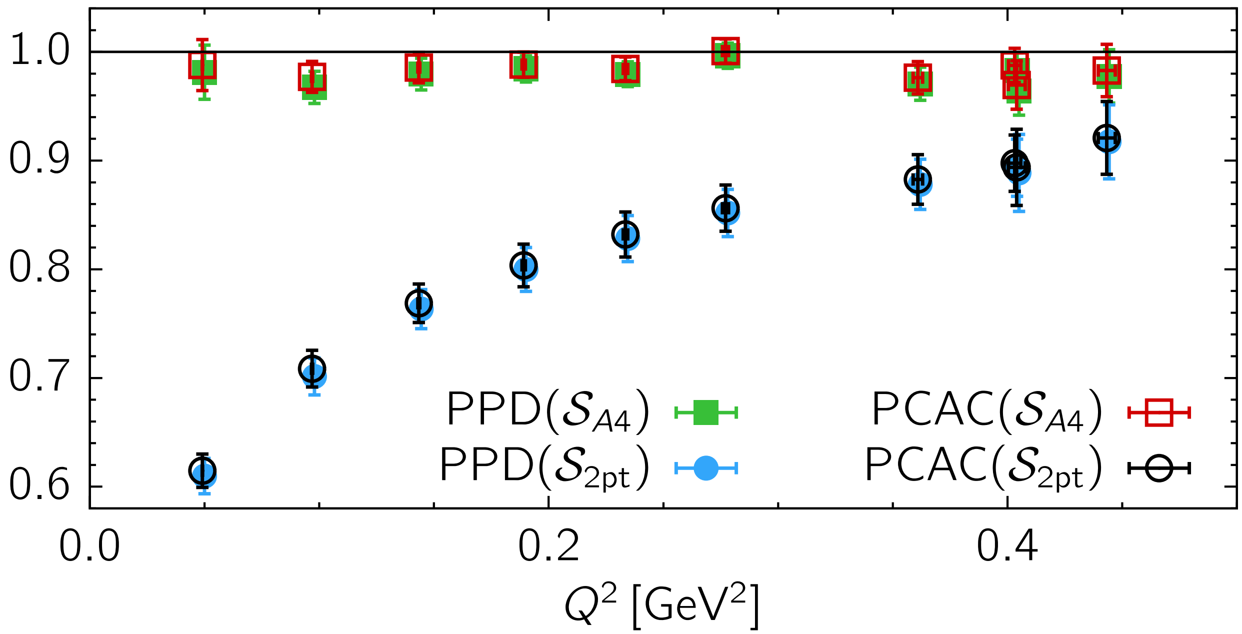
- $\widetilde{G}_P(Q^2), G_P(Q^2)$ は増加。$Q^2 \to$ 小で影響 $\to$ 大。最小の Q^2 では約２倍

$$g_P^* = \frac{m_\mu}{2M_N}\widetilde{G}_P(0.88m_\mu^2) = 4.67(24) \to 8.06(44)$$

  muon capture 実験値 $g_P^* = 8.06(55)$ を再現

- A_4 から求められた $G_A(Q^2), \widetilde{G}_P(Q^2)$ も尤もらしい結果 (問題③)

PCACとPPDの結果



PCAC relation $$\frac{m_q G_P(Q^2)}{M_N G_A(Q^2)} + \frac{Q^2}{4M_N^2}\frac{\tilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)} = 1$$

PPD $$\frac{\tilde{G}_P(Q^2)}{G_A(Q^2)}\frac{M_\pi^2 + Q^2}{4M_N^2} = 1$$

- $\mathcal{S}_{A4}$だとどちらも成り立つ(問題①,②)
- ２つの値は一致 $\rightarrow$ 本質的に同じものを見ている?

まとめ

従来は使われていなかった $C^{\text{3pt}}_{A_4,p}(t,\tau)$ を取り入れた $\mathcal{S}_{A4}$ 解析により

$G_A(Q^2), \tilde{G}_P(Q^2), G_P(Q^2)$ の問題を解決した

- PCAC relation と PPD が成り立つ $G_A(Q^2), \tilde{G}_P(Q^2), G_P(Q^2)$
- A_4 からも尤もらしい $G_A(Q^2), \tilde{G}_P(Q^2)$
- r_A が実験値を再現

理解できていない点

- $\mathcal{S}_{\text{2pt}}$ と $\mathcal{S}_{A4}$ の解析は χ^2/dof では区別できない

  $E_1(p), M_1(p)$ は大きく異なるが、$C^{\text{3pt}}_{A_i,p}, C^{\text{3pt}}_{P,p}$ フィットの χ^2/dof は同程度

  $\rightarrow E_1(p), M_1(p)$ を精度良く決める必要がある

- $G_A(Q^2)$ への影響が大き過ぎる?

  他グループの $G_A(0)$ は実験値を再現

  $\rightarrow \mathcal{S}_{A4}$ の補正を入れると $G_A(Q^2 \rightarrow 0)$ が実験値を超える?