Replica wormholes and the entropy of Hawking radiation

Almheiri et al. arXiv:1911 .2333

2021/02/12 Journal Club N. Ishibashi

ブラックホールの情報喪失問題

- 量子効果を考慮に入れると、ブラックホールは温度 $T_{\mathrm{H}} = \frac{1}{4\pi r_{\mathrm{s}}}$ の熱輻射を出す (Hawking)

$$|\Psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle_{\mathrm{bh}} |\phi_i\rangle_{\mathrm{r}}$$

- ブラックホールが蒸発して何もなくなってしまうと、熱輻射のみが残る
- もし、pure stateの状態の物質が重力崩壊してブラックホールを形成し、そのブラックホールが蒸発すると、pure stateがmixed stateになり、時間発展がユニタリーでないということになる
- 量子重力ではS matrixはユニタリーではないのでは？ (Hawking)

2つの立場

1. 情報は喪失する
2. 時間発展はユニタリーであるべきだ

- 2の立場をとると、量子重力の半古典近似から得られる事実と矛盾する点がある
- Replica wormholeと呼ばれる現象のおかげで、この矛盾が解消する
  - 実際の議論は2次元 JT gravity

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}} \sqrt{g}\phi(R+2) + \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{h}\phi K + \cdots$$

  - 2次元での結果を敷衍する

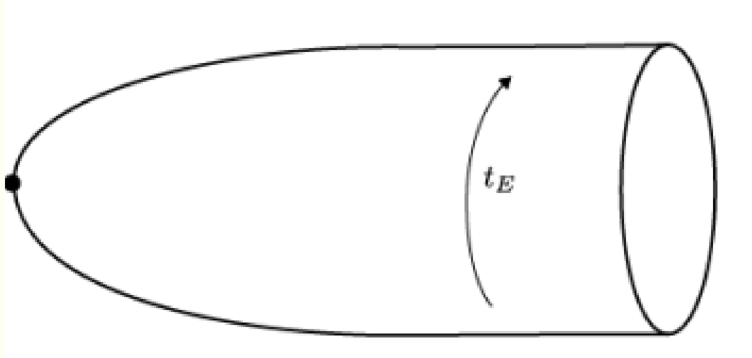
Outline

1. 矛盾
2. Replica wormhole
3. Island rule

１．矛盾

- ブラックホールの分配函数(Gibbons-Hawking)

$$Z(\beta) \quad = \quad \mathrm{Tr}[e^{-\beta H}] = \int [dg_{\mu\nu} d\phi] e^{-I_{\mathrm{E}}}$$
$$\sim \quad e^{-I_{\mathrm{cl.}}} Z_{\mathrm{qu.}}$$



- （熱力学的）エントロピー

$$S = (1 - \beta\partial_\beta) \ln Z(\beta) \sim \frac{A}{4G_{\mathrm{N}}} + S_{\mathrm{outside}}$$

- $S_{\mathrm{BH}} = \dfrac{A}{4G_{\mathrm{N}}}$:ブラックホールの熱力学的エントロピー

  S_{outside} :Hawking radiationの（エンタングルメント）エントロピー

エンタングルメントエントロピー

- ブラックホールの状態がpure stateであるとする

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \qquad\qquad |\Psi\rangle = \sum_i |\psi_i\rangle_{\mathrm{bh}} |\phi_i\rangle_{\mathrm{r}}$$

- Hawking radiationの（エンタングルメント）エントロピー

$$S_{\mathrm{r}} = -\mathrm{Tr}_{\mathrm{r}} \rho_{\mathrm{r}} \ln \rho_{\mathrm{r}} \qquad\qquad \rho_{\mathrm{r}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{bh}} \rho$$

- ブラックホールのエンタングルメントエントロピー

$$S_{\mathrm{bh}} = -\mathrm{Tr}_{\mathrm{bh}} \rho_{\mathrm{bh}} \ln \rho_{\mathrm{bh}} = S_{\mathrm{r}} \qquad\qquad \rho_{\mathrm{bh}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{r}} \rho$$

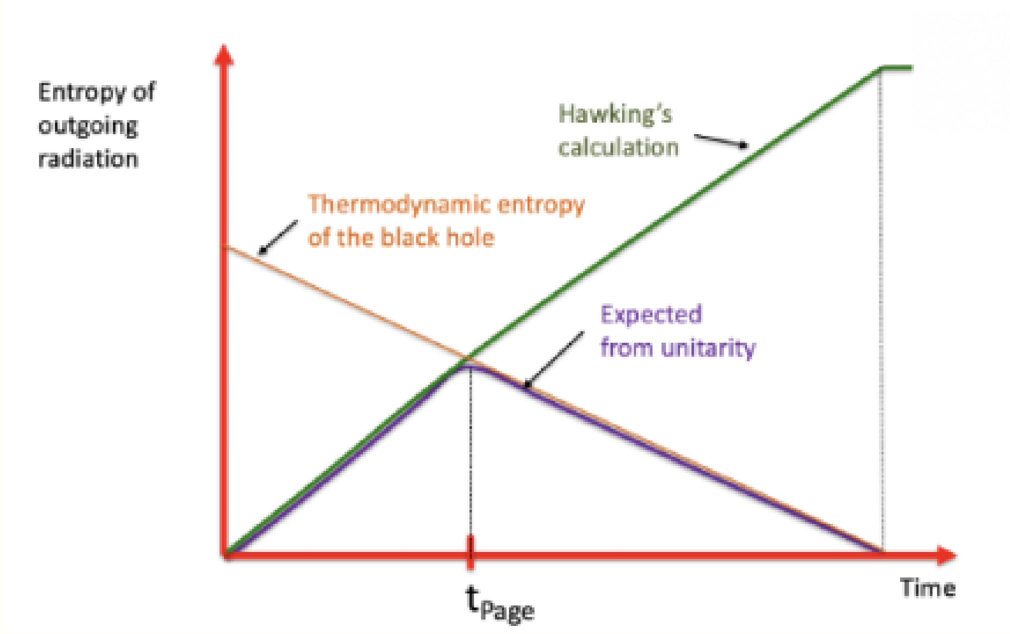
- ブラックホールの熱力学的エントロピーS_{BH} =熱力学的に同じように見える ρ_{bh} の与える S_{bh} の最大値

$$S_{\mathrm{r}} = S_{\mathrm{bh}} \leq S_{\mathrm{BH}}$$

時間発展がユニタリーであるとすると矛盾

- Gibbons-Hawkingが正しいならば、ブラックホールが蒸発する過程で
  - $S_{\rm r}$ は単調増加
  - $S_{\rm BH} = \dfrac{A}{4G_{\rm N}}$ は単調減少
- ある時刻(Page time)以降、$S_{\rm r} = S_{\rm bh} \leq S_{\rm BH}$ が成り立たなくなる

- 半古典近似の枠内で解決すべき問題

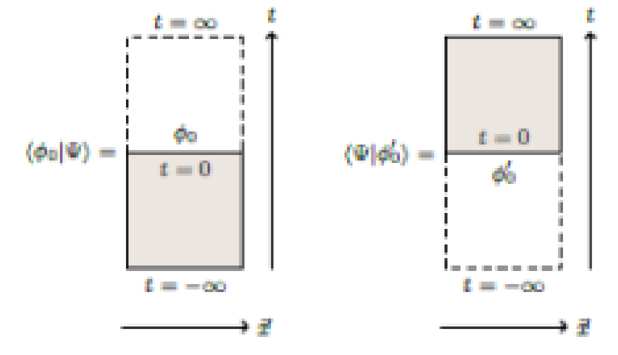


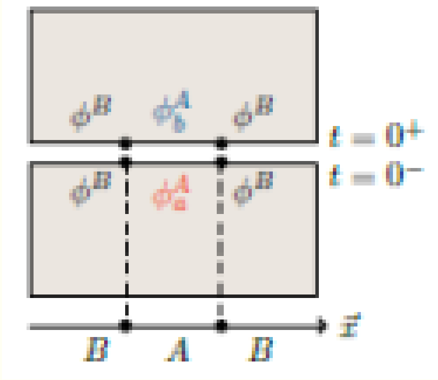
2． Replica wormhole

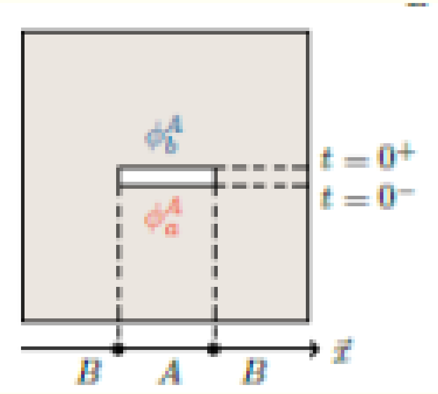
- Replica trick
  - エンタングルメントエントロピーを計算する方法　　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{B}}$　　$\rho_{\mathrm{A}} = \mathrm{Tr}_B \rho$

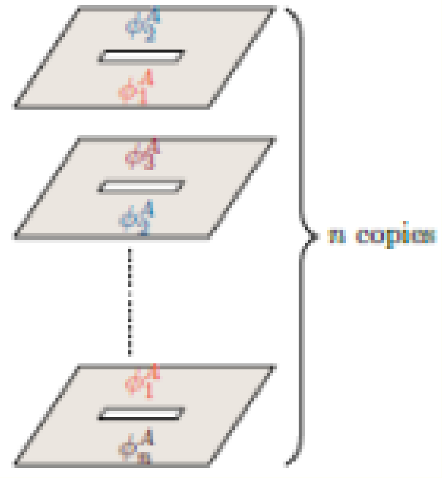
$$S = -\mathrm{Tr}_{\mathrm{A}} \rho_{\mathrm{A}} \log \rho_{\mathrm{A}} = -\lim_{n \to 1} (1 - n\partial_n) \log \mathrm{Tr}_{\mathrm{A}} \rho_{\mathrm{A}}^n$$

  - $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ の場合







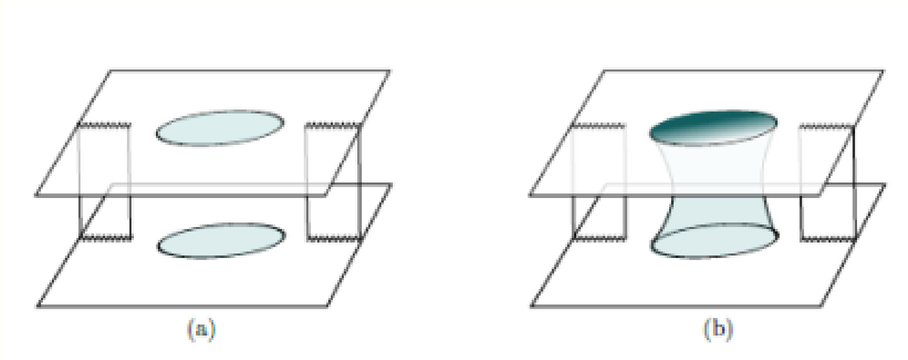


  - $\mathrm{Tr}_{\mathrm{A}} \rho_{\mathrm{A}}^n$　：カットのある時空で経路積分すればよい

Replica wormhole

- Hawking radiationのエンタングルメントエントロピーを計算しよう（半古典近似）

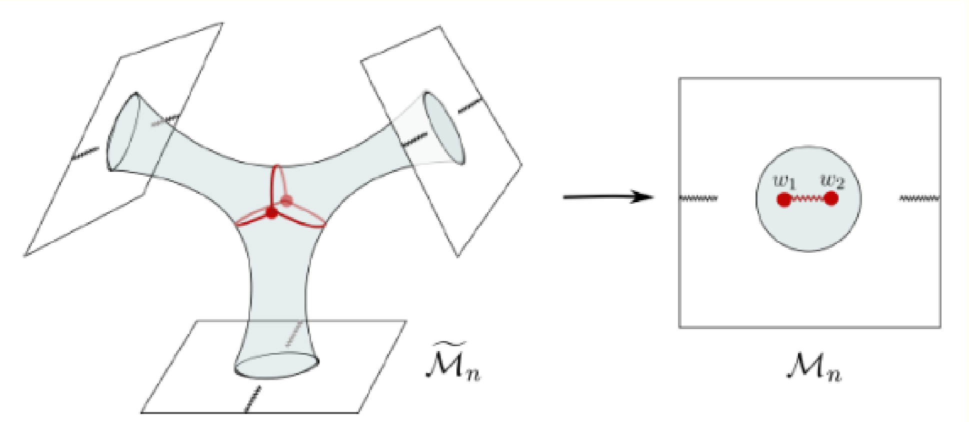
$n = 2$

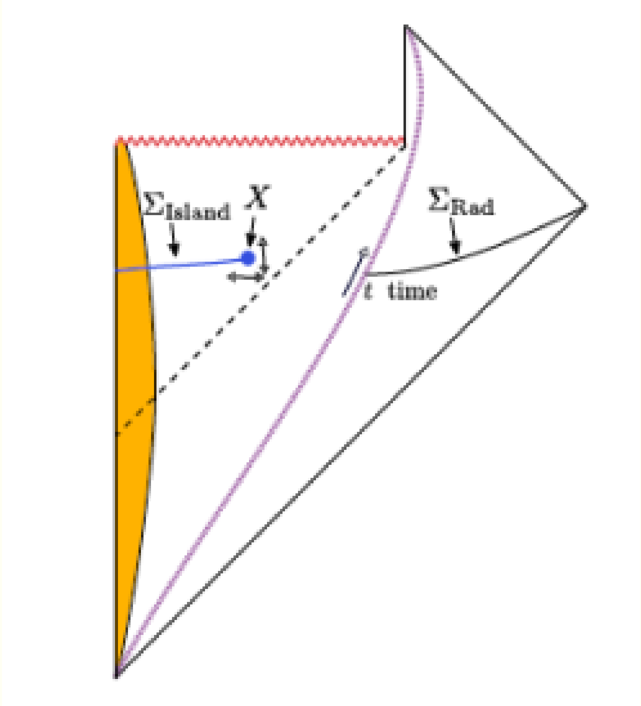


- 量子重力の場合、通常の場の理論にはない saddle point がある。

→replica wormhole

3. Island rule (Almheiri-Mahajan-Maldacena-Zhao)



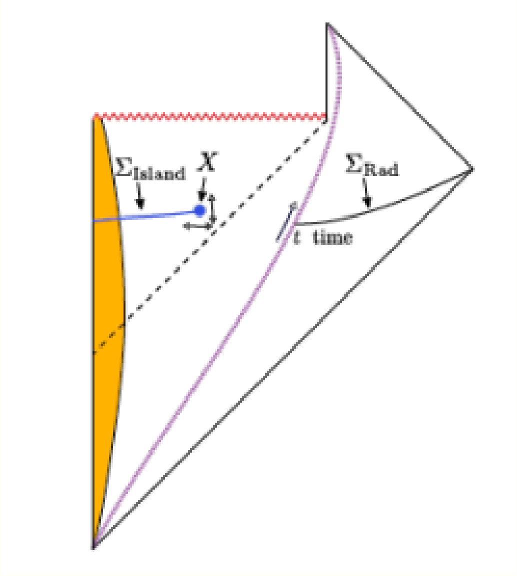


- Replica wormholeのエントロピーへの寄与

(Lewkowycz-Maldacena, Faulkner- Lewkowycz-Maldacena, Engelhardt-Wall, Dong-Lewkowycz)

$$S_{\text{Rad}} = \min_X \left\{ \text{ext}_X \left[\frac{\text{Area}(X)}{4G_{\text{N}}} + S_{\text{semi-cl}} \left[\Sigma_{\text{Rad}} \cup \Sigma_{\text{Island}} \right] \right] \right\}$$

矛盾の解消



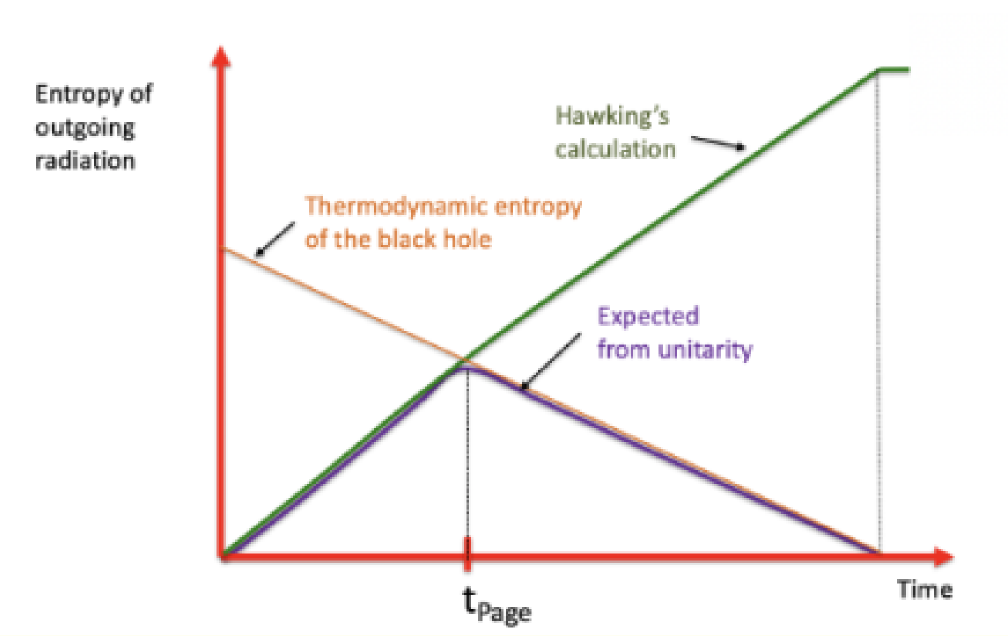
$$S_{\mathrm{Rad}} = \min_X \left\{ \mathrm{ext}_X \left[\frac{\mathrm{Area}(X)}{4G_{\mathrm{N}}} + S_{\mathrm{semi-cl}}\left[\Sigma_{\mathrm{Rad}} \cup \Sigma_{\mathrm{Island}}\right] \right] \right\}$$

- $t < t_{\mathrm{Page}}$ ではislandが無い方が得

$$S_{\mathrm{Rad}} = S_{\mathrm{semi-cl}}\left[\Sigma_{\mathrm{Rad}}\right]$$

- $t > t_{\mathrm{Page}}$ ではislandがあった方が得

$$S_{\mathrm{Rad}} \sim \frac{\mathrm{Area}(X)}{4G_{\mathrm{N}}}$$



まとめ

- Replica wormholeの寄与を考えに入れると、時間発展がユニタリーであると仮定したときに現れる矛盾を解消できる

- Replica wormhole→Island ruleは直接的には示されていない