Einstein-Gauss-Bonnet Gravity in Four-Dimensional Spacetime

By Drazen Glavan and Chunshan Lin

Phys. Rev. Lett. 124 (2020) 8, 081301
E-Print: arXiv:1905.03601 [gr-qc]

Journal club 11/27/2020　D1　足立 宏幸

Einstein 重力理論

$$S_{\mathrm{EH}}[g] \coloneqq \int_M \mathrm{d}^D x \sqrt{\det g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \Lambda \right]$$

M: $D = d + 1$次元の多様体
g: 計量テンソル
R: Ricci スカラー

G: Newton定数
Λ: 宇宙項

Einstein重力理論は、観測できる多くの重力に関する現象を再現する。

ブラックホールの特異点問題などの問題点も多々ある。

論文で提案されたこと

4D Einstein-Gauss-Bonnet 理論 (4D EGB理論)

$$\mathcal{L} := -\Lambda + \frac{1}{16\pi G}R + \frac{\alpha}{D-4}\left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right).$$

$$D = 4 + \epsilon \ (\epsilon \to +0)$$

- 次元正則化のように $D = 4 + \epsilon$ 次元 ($\epsilon \to +0$) で定義される新たな重力理論を提案！
- その重力理論は物理的な面で特に問題なさそう。
- ブラックホールの特異点問題の解消など、良い性質を持っている。

目次

- ➢ Lovelock 重力理論
- ➢ 4D EGB 重力
- ➢ Schwarzschild 解
- ➢まとめ

標準的な D 次元重力理論の物理的要請

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のみが自由度の局所的な場の理論
- 一般座標変換で不変
- 運動方程式が 2 階の微分方程式
  → ハミルトニアンが下に有界 [Ostrogradskyの定理]
  (注. 逆は必ずしも成り立たない。)

コメント

修正重力理論 (scalar-tensor gravity, Horndeski gravity, e.t.c.) では、上の条件を relax することで拡張を試みている。

今回はその可能性については考えない。

D 次元 Lovelock 重力

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のみが自由度の局所的な場の理論
- 一般座標変換で不変
- 運動方程式が 2 階の微分方程式

を満たす最も一般的な重力理論が Lovelock 重力:

$$\mathcal{L}_{\text{Lovelock}} := \sum_{n=0}^{\lfloor D/2 \rfloor} \alpha_n \mathcal{R}^{(n)},$$

$$\mathcal{R}^{(n)} = 2^{-n}(2n)!\, \delta^{\mu_1}_{[\alpha_1} \delta^{\nu_1}_{\beta_1} \cdots \delta^{\mu_n}_{\alpha_n} \delta^{\nu_n}_{\beta_n]} \prod_{r=1}^{n} R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r}$$

$R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$: Riemann 曲率, α_n: dimension-full な定数

D 次元 Lovelock 重力

$$\mathcal{L}_{\text{Lovelock}} \coloneqq \sum_{n=0}^{\lfloor D/2 \rfloor} \alpha_n \mathcal{R}^{(n)},$$

$$\mathcal{R}^{(n)} = 2^{-n}(2n)!\, \delta^{\mu_1}_{[\alpha_1} \delta^{\nu_1}_{\beta_1} \cdots \delta^{\mu_n}_{\alpha_n} \delta^{\nu_n}_{\beta_n]} \prod_{r=1}^{n} R^{\alpha_r \beta_r}_{\mu_r \nu_r}$$

を具体的に低次で展開すると、

$$\mathcal{L}_{\text{Lovelock}} \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 \left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right) + \cdots.$$

宇宙項　E.H.　Gauss-Bonnet

2 次元の表面項　4 次元の表面項

$2n = D$ の場合は表面項 (積分すると Euler 標数) になり、実は力学 (運動方程式) に効かない！

D 次元 Lovelock 重力

$$\mathcal{L}_{\text{Lovelock}} \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2\left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right) + \cdots.$$

2 次元の
表面項

4 次元の
表面項

つまりこの事から、4 次元の

- 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ のみが自由度の局所的な場の理論
- 一般座標変換で不変
- 運動方程式が 2 階の微分方程式

を満たす重力理論は Einstein 重力のみ！ [Lovelock の定理]

目次

- Lovelock重力理論
- 4D EGB 重力
- Schwarzschild 解
- まとめ

D 次元 Einstein-Gauss-Bonnet 重力

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EGB}} \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2\left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right).$$

$D > 4$ 次元の場合、Gauss-Bonnet項は力学に寄与する.

<u>この論文の提案した手法</u>

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EGB}} \coloneqq \alpha_0 + \alpha_1 R + \frac{\alpha}{D-4}\left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right).$$

古典解などを計算した後に極限 $D \to 4$ を取ると、 4 次元 の
重力理論でもGauss-Bonnet項の効果を取り入れることができる。

目次

- Lovelock 重力理論
- 4D EGB 重力
- Schwarzschild 解
- まとめ

Schwarzschild 解

$$\mathcal{L} \coloneqq \frac{1}{16\pi G} R + \alpha_2 \left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right).$$

Schwarzschild 解は、宇宙項がない球対称で静的で、$r \to \infty$ で漸近的に平坦になる古典解

$$\mathrm{d}s^2 \coloneqq -\mathrm{e}^{2\omega} \mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2\lambda} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\Omega_{D-2}^2$$

$D \geq 5$ の場合には EGB 重力理論での厳密解がすでに研究されていた。[Boulware-Deser] (1985)

M: 質量

$$-g_{00} = \mathrm{e}^{2\omega} = \mathrm{e}^{2\lambda}$$

$$= 1 + \frac{r^2}{32\pi G \alpha_2 (D-4)(D-3)} \left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{128\pi \alpha_2 (D-4)(D-3) G^2 M}{r^{D-1}} \right)} \right).$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha}{D-4}$$ として極限 $D \to 4$ を取ると、有限の補正解を得る！

Schwarzschild解

$$-g_{00} = 1 + \frac{r^2}{32\pi\alpha G}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{128\pi\alpha G^2 M}{r^3}}\right).$$

$\alpha < 0$ の場合

$\sqrt{}$ の中が十分小さい r で負になるので、解としてよろしくない。

$\alpha = 0$ の場合

$\alpha \to +0$ で収束し、通常のSchwarzschild解に帰着する。

$\alpha > 0$ の場合

臨界質量 $M^* := \sqrt{16\pi\alpha/G}$ を導入すると、

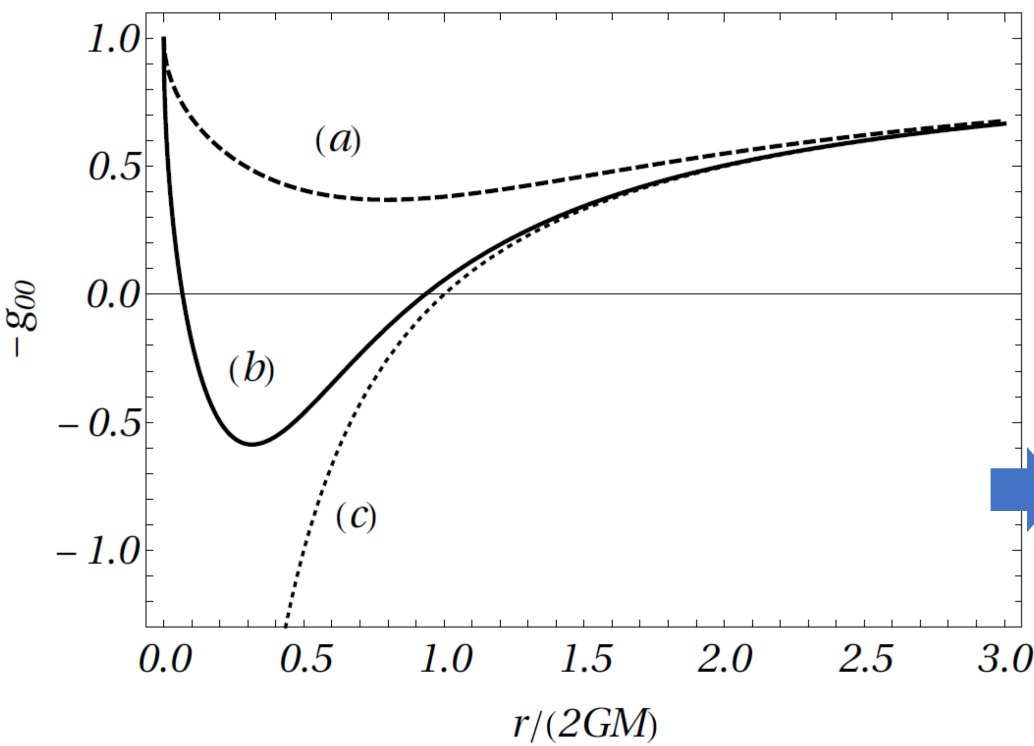
$M < M^*$ の場合は時空の地平面がないが、$M > M^*$ の場合は

$r_{\mathrm{H}} = GM\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{M^{*2}}{M^2}}\right)$ に地平面が現れる。

Schwarzschild解

$$-g_{00} = 1 + \frac{r^2}{32\pi\alpha G}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{128\pi\alpha G^2 M}{r^3}}\right).$$

重力ポテンシャル $-g_{00}$ のグラフ(論文 Fig. 1)



(a) $M = M^*/2$の場合
(b) $M = 2M^*$の場合
(c) $\alpha = 0$の場合
(通常のGR)

EH + EGB 重力理論でも $R \propto r^{-3/2}$ で特異点 $r = 0$ を持つが、斥力で特異点にたどり着くことはできない！

まとめ

$$\mathcal{L} := -\Lambda + \frac{1}{16\pi G}R + \frac{\alpha}{D-4}\left(R^2 + R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}\right).$$

- 次元の極限操作を用いて Einstein-Gauss-Bonnet 項の効果を取り入れた、4次元重力理論を提案！
- その重力理論を用いて、Schwarzschild 解や cosmology などに応用。現象論的に面白い効果を含む。

批判. [Arrechea, Delhom, Jimenez-Cano]…

極限操作 $D \to 4$ が well-defined に行えるのは、対称性の高い空間 (Schwarzschild 解, ...) の場合しか示されていない。一般の非対称な時空の場合にも極限が well-defined になるかは不明。