JT Gravity and the Ensembles of Random Matrix Theory

Douglas Stanford, Edward Witten, arXiv:1907.03363 [hep-th], 2019

文献紹介（11/6）

D2　武田　潤

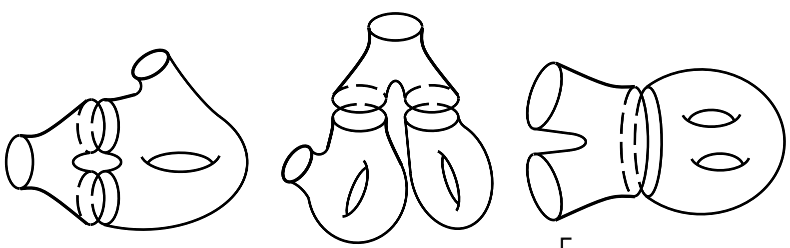
Mirzakhani’s recursion relation とSuper化

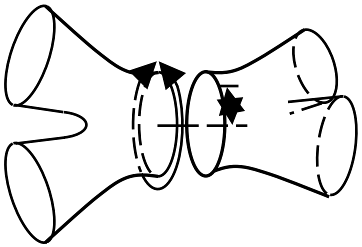
動機と背景

Mirzakhani’s recursion relation

Super recursion relation

総括と応用





$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathsf{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$

$$+\sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\left(b-\mathsf{T}(b,b',b_i)\right)V_{g,N}(b',B\setminus b_k)$$

動機と背景

- Jackiw-Teitelboim重力
- Moduli空間の体積とMirzakhani’s recursion relation
- Mirzakhani’s recursion relationの応用

Mirzakhani’s recursion relation

Super recursion relation

総括と応用

Jackiw-Teitelboim gravity

スカラー場と相互作用する二次元重力

$$Z_{g,N}^{\mathrm{bulk}} = \int \left.\frac{[dg_{ab} d\phi]}{\mathrm{diff}}\right|_{g,N} \exp\left(-i\int_{\mathcal{M}} d^2x\sqrt{g}\,(R+2)\,\phi\right)$$

C. Teitelboim, Phys. Lett. B 126, 1-2, 41-45, 1983
R. Jackiw, Nucl. Phys. B 252, 343-356, 1985

SYK模型のADS/CFT双対

K. Jensen, arXiv:1605.06098 [hep-th], 2016
J. Maldacena, D. Stanford, Phys. Rev. D 94, 106002, arXiv:1604.07818 [hep-th], 2016
G. Sárosi, arXiv:1711.08482 [hep-th], 2017　など

BH、$T\bar{T}$、Twister、SUGRA、BF…

スカラー場を積分すると

$$\int \left.\frac{[dg_{ab}]}{\mathrm{diff}}\right|_{g,N} \times \delta\left(\sqrt{g}\,(R+2)\right)$$

Moduli空間の体積

Moduli空間の体積

$$V_{g,N}(b_1, \ldots, b_N) = \int \frac{[dg_{ab}]}{\mathrm{diff}}\bigg|_{g,N} \times \delta\left(\sqrt{g}\,(R+2)\right)$$

Genus g、境界がgeodesicでN個あり長さが $b_1, \ldots, b_N$ のRiemann面上のとりうる計量の配位を等角写像で“割った”同値類の数

Mirzakhani’s recursion relation ＝ Moduli空間の体積を求める公式

$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathsf{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)\,V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$

$$+ \sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\left(b - \mathsf{T}(b,b',b_i)\right)V_{g,N}(b', B\setminus b_k)$$

Mirzakhani公式の応用

Mirzakhani's recursion relation

$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathsf{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)\,V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$
$$+\sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\left(b-\mathsf{T}(b,b',b_i)\right)V_{g,N}(b',B\setminus b_k)$$

→ JT重力の経路積分 $Z_{g,n}^{bulk} = \int \frac{[dgd\phi]}{diff}\bigg|_g \exp\left[-i\left(\int_{\mathcal{M}} d^2x\sqrt{g}\,(R+2)\,\phi\right)\right]$ の計算

P. Saad, S. H. Shenker, D. Stanford, arXiv:1903.11115 [hep-th], 2019

→ 行列模型のTopological recursionの特別な例

B. Eynard, N. Orantin, arXiv:0705.3600 [math-ph], 2007

動機と背景

Mirzakhani’s recursion relation

- PantsとFenchel-Nielsen coordinate
- 多様体の縫い合わせ、McShane恒等式
- Mirzakhani’s recursion relation

Super recursion relation

総括と応用

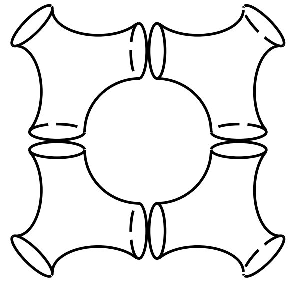
Pants, Fenchel-Nielsen coordinate

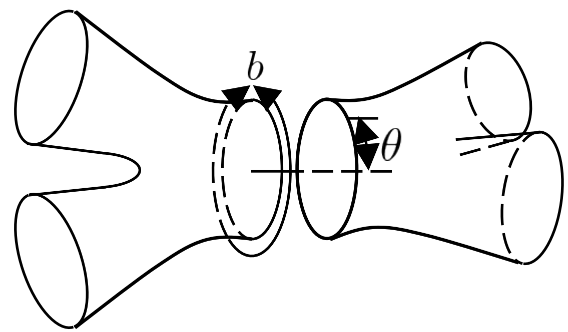
(双曲型)Riemann面はgeodesicを用いて
“Pants”に分割できる

PantsのModuli空間は点(次元0)で体積1

張り合わせによってModuli空間に寄与する
自由度は“長さ”と“ねじれ”

ex)





Wolpertの定理

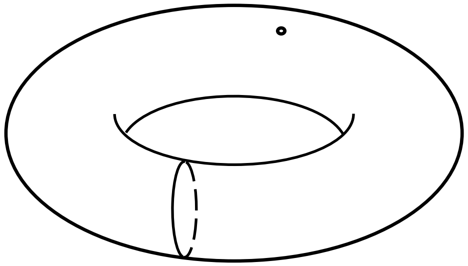
Moduli空間の体積要素は $\prod_{i=1}^{3g+n-3} b_i db_i d\theta_i$ で表すことができる

Fenchel-Nielsen coordinate

S. Wolpert, Bull. Amer. Math. Soc. 83(1977), 1306–1308, 1977
S. Wolpert, Ann. of math. 109(1979), 323–351, 1979

多様体の縫い合わせ

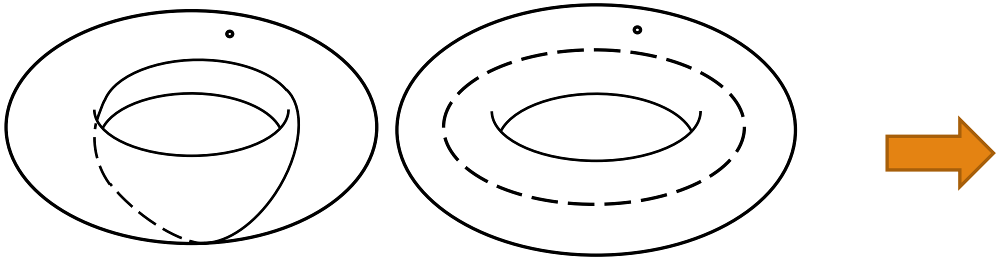
One-punctured hyperbolic torus



$$V_{g=1,N=1}(b) \stackrel{?}{=} \int_0^\infty ldl \int_0^1 d\theta \cdot 1$$

…発散する

色々な切り方がある(モジュラー不変性)



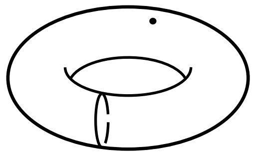
数えすぎが存在する

本当は $V_{g=1,N=1}(b) = \int_{\mathcal{F}} ldld\theta \cdot 1$ としなければならない

（重複がない領域→？）

McShane恒等式

One-punctured hyperbolic torusに関して



McShane恒等式：
$$\sum_{\gamma} \frac{1}{e^{l(\gamma)}+1} = \frac{1}{2}$$

（切り方のモジュラー同値類に関する総和）

G. McShane, Invent. Math. 132 (1998), no. 3, 607–632.

$$V_{g=1,N=1}(b) = \int_{\mathcal{F}} l dl d\theta \cdot 1 = \int_{\mathcal{F}} l dl d\theta \sum_{\gamma} \frac{2}{e^{l(\gamma)}+1} = \int_{[0,\infty)\times[0,1)} l dl d\theta \frac{2}{e^{l}+1}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

Mirzakhani’s recursion relation

higher genusへ拡張する

一般化McShane恒等式：
$$b = \sum_{\Lambda\in\Upsilon} \mathsf{D}\left(b, b', b''\right) + \sum_{i\in I,\Lambda\in\Upsilon_i} \left[\mathsf{T}\left(b, b_i, b'\right) + \mathsf{D}\left(b, b_i, b'\right)\right]$$

$$\mathsf{T}\left(b, b', b''\right) = \log \frac{\cosh\frac{b''}{2} + \cosh\frac{b+b'}{2}}{\cosh\frac{b''}{2} + \cosh\frac{b-b'}{2}} \quad D\left(b, b', b''\right) = 2\log e^{-b/2}\frac{\cosh\frac{b''}{2} + \cosh\frac{b-b'}{2}}{\cosh\frac{b''}{2} + \cosh\frac{b+b'}{2}}$$

Mirzakhani’s recursion relation：

$$bV_{g,N+1}\left(b, B\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathsf{D}\left(b, b', b''\right)\left[V_{g-1,N+2}\left(b', b'', B\right) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}\left(b', B_1\right)V_{h_2,|B_2|+1}\left(b'', B_2\right)\right]$$
$$+ \sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\left(b - \mathsf{T}\left(b, b', b_i\right)\right)V_{g,N}\left(b', B\setminus b_k\right)$$

M. Mirzakhani, Inventiones mathematicae 167 no. 1, 179–222, 2007

genus（or境界の数）が小さいものから、再帰的に、
積分を計算するだけで求めることができる。

動機と背景

Mirzakhani's recursion relation

Super recursion relation

- Super Riemann面とRiemann面の対応：foliation
- Super recursion relation

$\mathcal{N}=1$

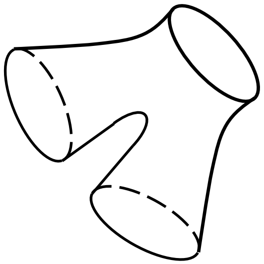
Super (Riemann) surface

（bosonic）Rieman面（次元 $2|0$ ）

geodesicな境界（次元$1|0$）

Moduli空間＝

等角変換$SL\left(2,\mathbb{R}\right)$の同値類



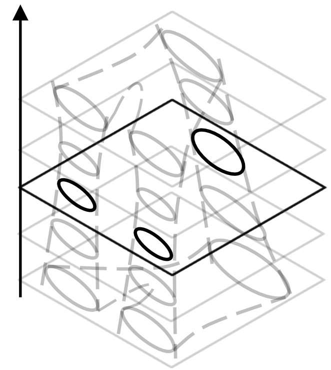
超Riemann面（次元 $2|2$ ）

境界（次元 $1|2$ ）

超Moduli空間＝

超等角変換 $OSp\left(1|2\right)$の同値類

→ 次元 $1|2$ の境界で張り合わせ？



実はFoliationを考えると

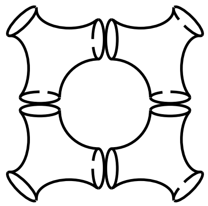
次元 $2|0$ の代表元（面）の性質について考えるだけでよい

Super recursion relation

super FN coordinate:

$$\prod_{s\in\mathfrak{S}} dl_s d\varrho_s \prod_{t\in\mathfrak{T}} \frac{1}{8\pi} e^{-(a_t+b_t)/4} \cosh c_t/4 \left[d\xi_t d\psi_t\right]$$

張り合わせる境界　　分解してできるpants



bosonicの時は

$$\prod_{s\in\mathfrak{S}} dl_s d\varrho_s$$

Super recursion relation:

$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathcal{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)\,V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$
$$+2\sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\mathcal{T}(b,b_i,b')\,V_{g,N}(b',B\setminus b_k)$$

$$\mathcal{T}(b,b',b'') = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{1}{\cosh\frac{b-b'+b''}{2}} + \frac{1}{\cosh\frac{b-b'-b''}{2}} - \frac{1}{\cosh\frac{b+b'+b''}{2}} - \frac{1}{\cosh\frac{b+b'-b''}{2}}\right)$$

$$\mathcal{D}(b,b',b'') = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{\cosh\frac{b+b'+b''}{2}} - \frac{1}{\cosh\frac{b+b'-b''}{2}}\right)$$

総括と応用

Fenchel-Nielsen coordinate ・ 一般化McShane恒等式

→Mirzakhani's recursion relation

超Riemann面のModuli空間を考えるときは

$2|0$ 次元の面について考えればよい

Super recursion relation

$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathcal{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$
$$+2\sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\mathcal{T}(b,b_i,b')V_{g,N}(b',B\setminus b_k)$$

→ Super JT ・ 超対称性の入った行列模型のTopological recursion

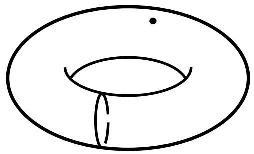
D. Stanford, E. Witten, arXiv:1907.03363 [hep-th], 2019
P. Saad, S. H. Shenker, D. Stanford, arXiv:1903.11115 [hep-th], 2019

超弦理論・超弦の場の理論への応用も…

Backup slides

McShane恒等式

One-punctured hyperbolic torusに関して



McShane恒等式: $$\sum_{\gamma} \frac{1}{e^{l(\gamma)}+1} = \frac{1}{2}$$

（切り方のモジュラー同値類に関する総和）

$$V_{g=1,N=1}(b) = \int_{\mathcal{F}} l dl d\theta \cdot 1 = \int_{\mathcal{F}} l dl d\theta \sum_{\gamma} \frac{2}{e^{l(\gamma)}+1} = \int_{[0,\infty)\times[0,1)} l dl d\theta \frac{2}{e^{l}+1}$$

$$\longrightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

一般のRiemann面に対して

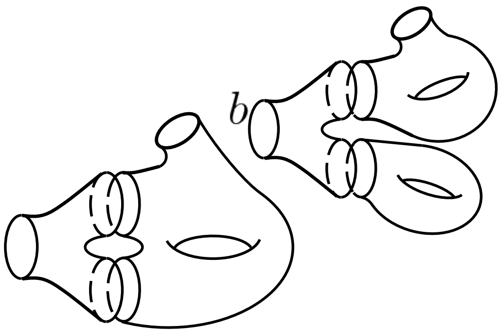
$$1 \overset{\exists ?}{=} \sum_{\Lambda} f\left(b, b', b''\right)$$

が作れるか？

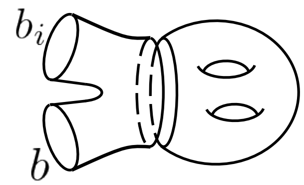
（すべての切り方に関する総和）

一般化McShane恒等式

Υ



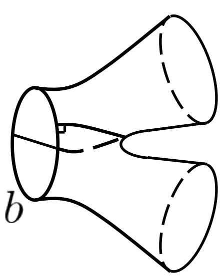
Υ_i



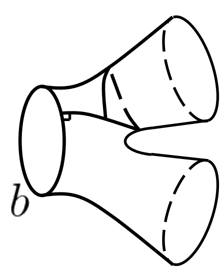
$$b = \sum_{\Lambda \in \Upsilon} \mathsf{D}\left(b, b', b''\right) + \sum_{i \in I, \Lambda \in \Upsilon_i} \left[\mathsf{T}\left(b, b_i, b'\right) + \mathsf{D}\left(b, b_i, b'\right)\right]$$

境界から直角に出したgeodesicが

$\mathsf{D}\left(b, b', b''\right)$



元に戻ってくる



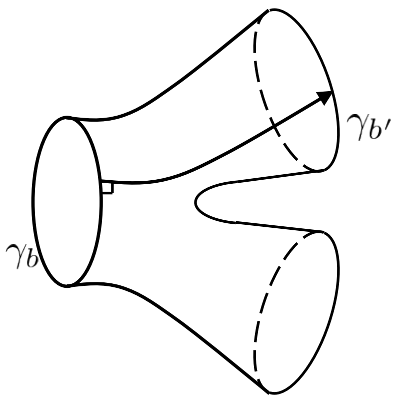
自身にぶつかる

$\mathsf{T}\left(b, b', b''\right)$

他の境界にぶつかる

ような境界上の領域の長さ

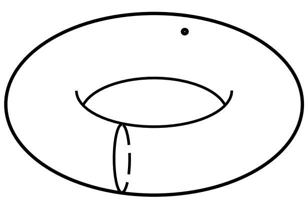
具体的な形



$$\mathsf{T}\left(b, b', b''\right) = \log \frac{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b+b'}{2}}{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b-b'}{2}}$$

$$D\left(b, b', b''\right) = 2 \log e^{-b/2} \frac{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b-b'}{2}}{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b+b'}{2}}$$

One-punctured hyperbolic torusなら

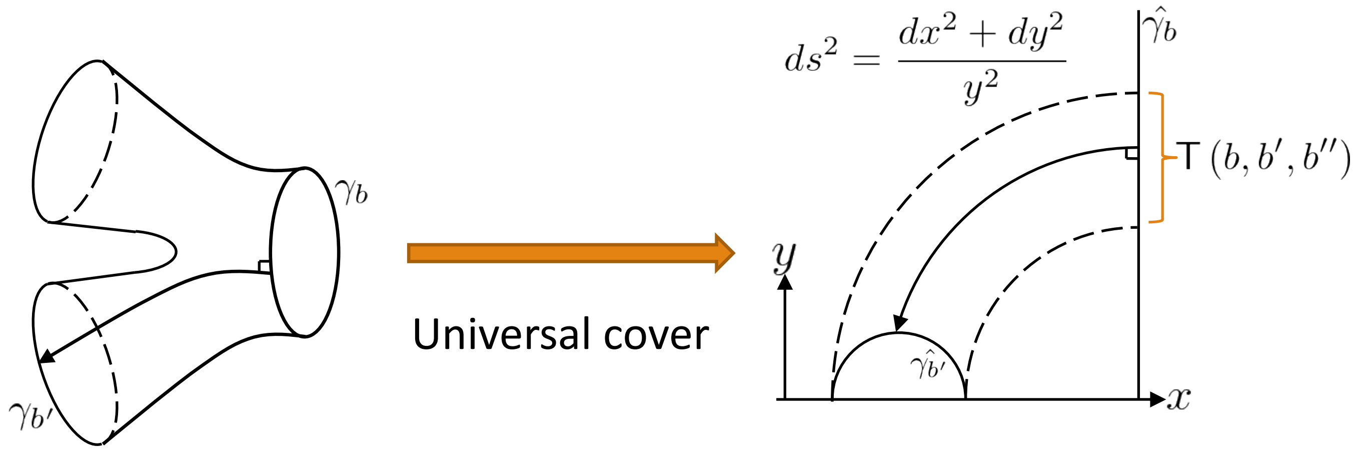


$$b = \sum_{\Lambda \in \Upsilon} D\left(b, l, l\right) = \sum_{\Lambda \in \Upsilon} 2 \log e^{b/2} \frac{\cosh \frac{l}{2} + \cosh \frac{b-l}{2}}{\cosh \frac{l}{2} + \cosh \frac{b+l}{2}}$$

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{e^{l(\gamma)} + 1} = \frac{1}{2}$$

McShane恒等式が出てくる

導出



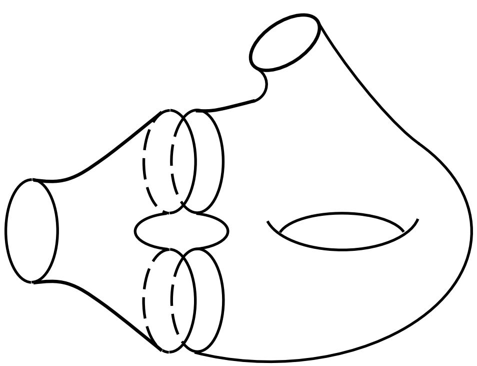
$$\mathsf{T}(b, b', b'') = \log \frac{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b+b'}{2}}{\cosh \frac{b''}{2} + \cosh \frac{b-b'}{2}}$$

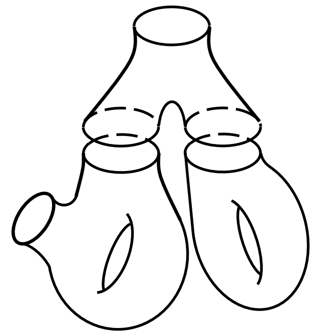
Mirzakhani's recursion relation

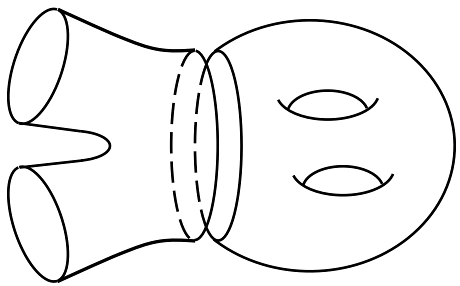
$$bV_{g,N+1}(b,B) = \frac{1}{2}\int_0^\infty b'db'b''db''\mathsf{D}(b,b',b'')\left[V_{g-1,N+2}(b',b'',B) + \sum_{(h_1,h_2),(B_1,B_2)}^{stable} V_{h_1,|B_1|+1}(b',B_1)\,V_{h_2,|B_2|+1}(b'',B_2)\right]$$

$$+ \sum_{b_k\in B}\int_0^\infty b'db'\left(b - \mathsf{T}(b,b',b_i)\right)V_{g,N}(b',B\setminus b_k)$$

M. Mirzakhani, Inventiones mathematicae 167 no. 1, 179-222, 2007

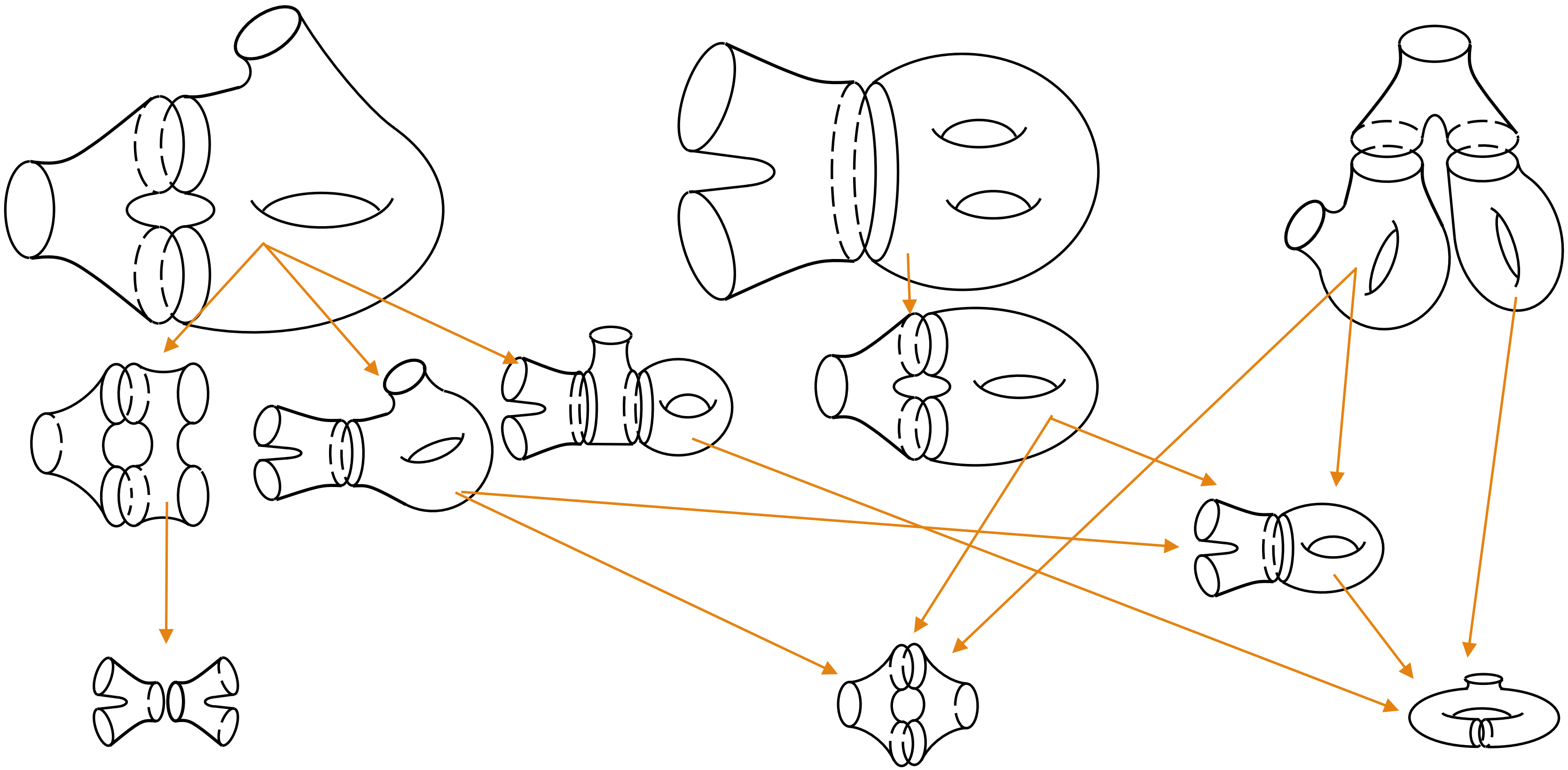






Recursion example

Pantsに行き着くか見てみると…



$\mathcal{N}=1$
Super (Riemann) surface

（bosonic）Rieman面 （次元 $2|0$ ）

geodesicな境界（次元$1|0$）

Moduli空間＝

等角変換 $SL\left(2,\mathbb{R}\right)$ の同値類

FN coodinate

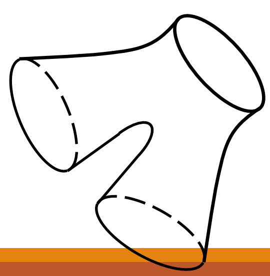
境界同士の張り合わせ

R-Torsion（胞体分割・等角写像）

一般化McShane恒等式

どの境界で切るか

境界から垂直にgeodesicを伸ばす



超Riemann面（次元 $2|2$ ）

境界（次元 $1|2$ ） : 境界が“geodesic”？

超Moduli空間＝

超等角変換 $OSp\left(1|2\right)$ の同値類

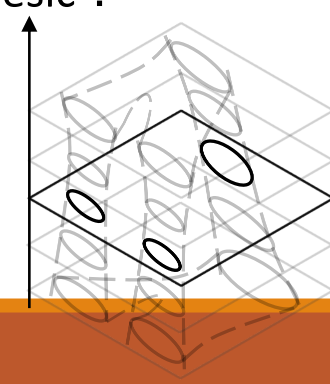
“超”FN coodinate？

超多様体の胞体分割？

“超”境界での張り合わせ？

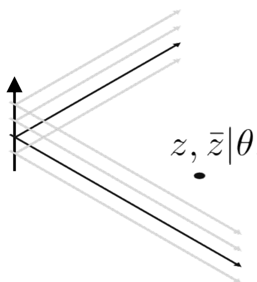
一般化“超”McShane恒等式？

直交（交差）？geodesic？

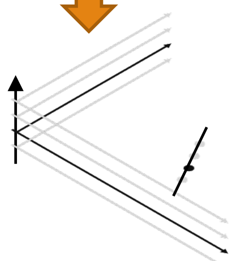


foliation

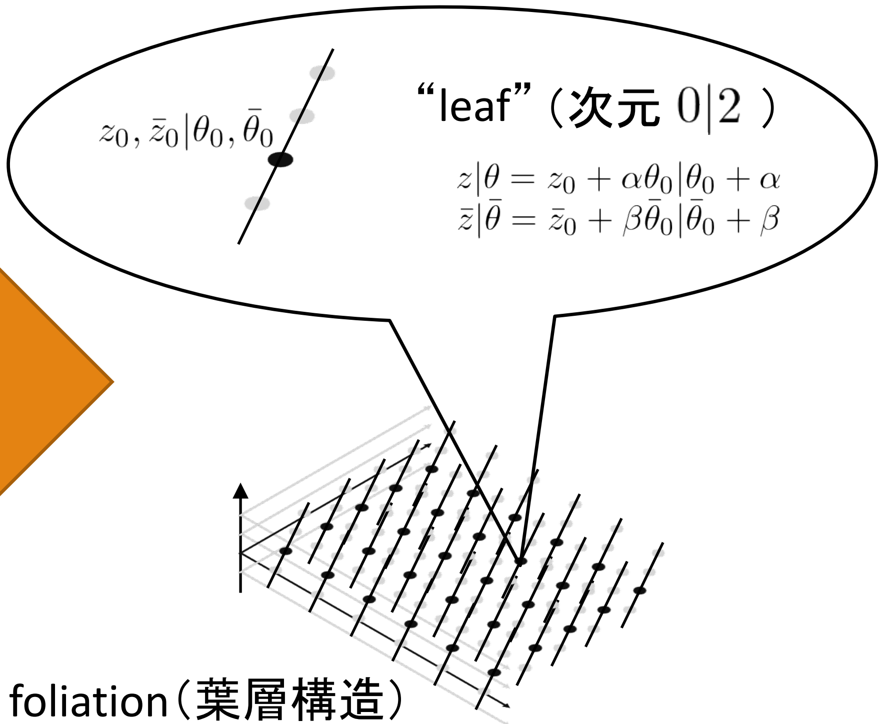
（考えている多様体を普遍被覆する
“超”Poincaré上半平面を考える）



$$D_\theta = \partial_\theta + \theta \partial_z$$
$$D_{\bar{\theta}} = \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta} \partial_z$$



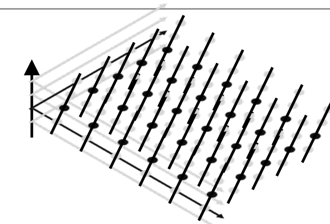
（軌道同士は交わらない）



foliation（葉層構造）

foliationの性質

leaf $\begin{array}{l} z|\theta = z_0 + \alpha\theta_0|\theta_0 + \alpha \\ \bar{z}|\bar{\theta} = \bar{z}_0 + \beta\bar{\theta}_0|\bar{\theta}_0 + \beta \end{array}$



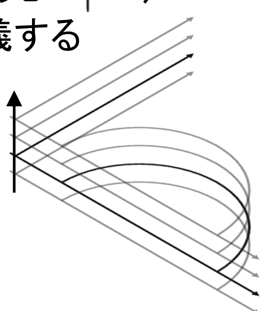
leaf自体は超等角不変
leaf内の各点は超等角変換で移り変わる

→ 超等角同値類をとると消える
（代表元を持ってくればよい）

$z, \bar{z}|0, 0$ とleavesは一対一対応

→ $2|0$ 次元面 $z, \bar{z}|0, 0$
について考えればよい

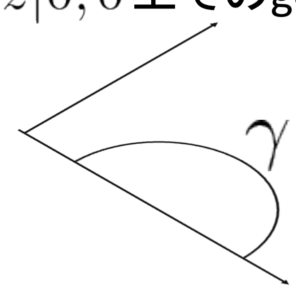
“超”geodesicな
境界（次元 $1|2$ ）
と定義する



$\mathcal{G}(\gamma) = \hat{\gamma}$

← 各点にleafがある

$z, \bar{z}|0, 0$ 上でのgeodesic

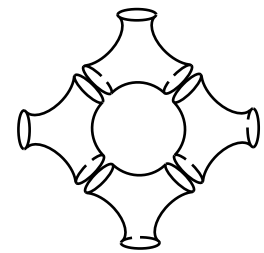


FN coodinateとMcShane恒等式のSuperanalog

FN coodinate

$$\prod_{s\in\mathfrak{S}} dl_s d\varrho_s \qquad\qquad \prod_{s\in\mathfrak{S}} dl_s d\varrho_s \prod_{t\in\mathfrak{T}} \frac{1}{8\pi} e^{-(a_t+b_t)/4} \cosh c_t/4 \, [d\xi_t d\psi_t]$$

張り合わせる境界　　　　分解してできるpants



（自由度）

$$6g+2N-6 \qquad\qquad 6g+2N-6|4g+2N-4$$

一般化McShane恒等式

$$b=\sum_{\Lambda\in\Upsilon}\mathsf{D}\left(b,b',b''\right)+\sum_{i\in I,\Lambda\in\Upsilon_i}\left[\mathsf{T}\left(b,b_i,b'\right)+\mathsf{D}\left(b,b_i,b'\right)\right]$$

$$b=\sum_{\Lambda\in\Upsilon}\hat{\mathsf{D}}\left(b,b',b''|\alpha,\beta\right)+\sum_{i\in I,\Lambda\in\Upsilon}\left[\hat{\mathsf{T}}\left(b,b_i,b'|\alpha,\beta\right)+\hat{\mathsf{D}}\left(b,b_i,b'|\alpha,\beta\right)\right]$$

$$\mathsf{T}\left(b,b',b''\right)=\log\frac{\cosh\frac{b''}{2}+\cosh\frac{b+b'}{2}}{\cosh\frac{b''}{2}+\cosh\frac{b-b'}{2}}$$

$$\hat{\mathsf{T}}(b,b',b''|\xi,\psi)=\log\frac{\cosh\frac{b''}{2}+\cosh\frac{b+b'}{2}-\frac{\xi\psi}{2}\left(e^{\left(b+b'\right)/2}+\delta_b\delta_{b'}\right)}{\cosh\frac{b''}{2}+\cosh\frac{b-b'}{2}+\frac{\xi\psi}{2}\left(e^{b/2}\delta_{b'}+e^{b'/2}\delta_b\right)}$$