

# Target Space Entanglement Entropy

Edward Mazenc & Daniel Ranard  
arXiv:1910.07449v1 [hep-th]

素粒子論研究室 博士前期課程 2 年 石井雄太

2020/10/30(金) 文献紹介

# 目次

## 導入

非相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

## 結論と展望

## 導入

非相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

結論と展望

# エンタングルメント・エントロピー

- ▶ 量子力学におけるエンタングルメント・エントロピー  
⇒ Hilbert 空間を  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  と直積分解した上で定義

## エンタングルメント・エントロピー

$\mathcal{H}$  上の密度行列  $\rho$  を  $\mathcal{H}_A$  に制限した縮約密度行列 (以下 RDM)  $\rho_A \equiv \text{Tr}_B[\rho]$  を用いて、エンタングルメント・エントロピー (以下 EE) を定義:

$$S_A = -\text{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] \quad (1)$$

⇒ 部分系  $A$  の観測者に関する情報量の定式化

### 情報量の指標

- ▶ 情報理論: Shannon エントロピー  $S = -\sum_{\alpha} p_{\alpha} \log p_{\alpha}$  ( $p_{\alpha}$ : 確率分布)
- ▶ 量子情報理論: von Neumann エントロピー  $S = -\text{Tr}[\rho \log \rho]$  ( $\rho$ : 密度行列)

## 積状態とエンタングル状態 / 純粋状態と混合状態

例) 2体の電子スピン系、 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  上の純粋状態  $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

▶  $|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B$  : 積状態の時

$$\rho_A = |\downarrow\rangle_{AA}\langle\downarrow| : \text{純粋状態}, \quad S_A = 0 \quad (2)$$

積状態の場合、RDM は純粋状態であり、EE は 0

▶  $|\Psi\rangle = (|\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B) / \sqrt{2}$  : エンタングル状態の時

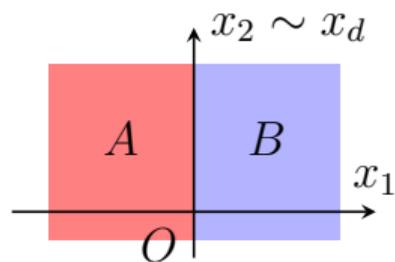
$$\rho_A = \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_{AA}\langle\downarrow| + \frac{1}{2} |\uparrow\rangle_{AA}\langle\uparrow| : \text{混合状態}, \quad S_A = \log 2 \quad (3)$$

エンタングル状態の場合、RDM は混合状態で、EE は non-zero

# 場の理論とエンタングルメント・エントロピー

▶ 場の理論の EE : 通常、時刻一定面の空間を分割して計算

例)  $d + 1$  次元自由スカラー場理論  $\phi(x)$  ( $d \neq 1$ )、 $\rho_{\text{tot}} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$  ( $|\Psi\rangle$  は真空)  
 $\Rightarrow$  Hilbert 空間は  $\mathcal{H} = \bigotimes_{\mathbf{x}} \mathcal{P}_{\mathbf{x}}$  ( $\mathcal{P}_{\mathbf{x}} = \text{span}\{|\phi\rangle_{\mathbf{x}} : \phi \in \mathbb{R}\}$ )



Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  は以下のように直積分解される

$$\mathcal{H} = \left( \bigotimes_{\mathbf{x} \in A} \mathcal{P}_{\mathbf{x}} \right) \otimes \left( \bigotimes_{\mathbf{x} \in B} \mathcal{P}_{\mathbf{x}} \right) \equiv \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (4)$$

部分領域  $A$  の EE (紫外カットオフ  $\epsilon$ ) :

$$S_A = \frac{1}{6(d-1)(4\pi)^{(d-1)/2}} \frac{V_{d-1}}{\epsilon^{d-1}} + \mathcal{O}(\epsilon^{-(d-3)}) \quad (5)$$

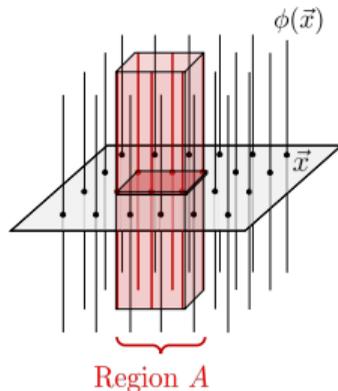
( $V_{d-1}$  :  $d - 1$  次元体積、すなわち境界である  $d - 1$  次元平面  $x_1 = 0$  の面積)

# ベース空間とターゲット空間

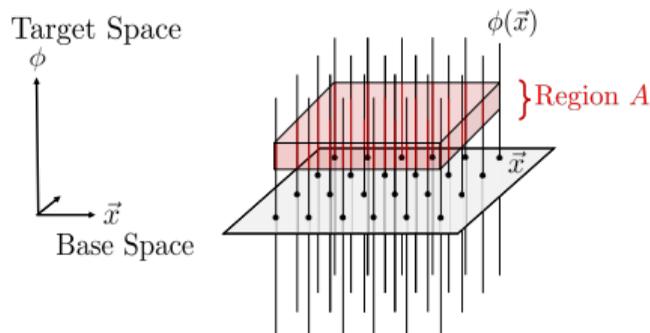
$d + 1$  次元の自由スカラー場  $\phi(x)$

- ▶ ベース空間 (base space) :  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  の空間
- ▶ ターゲット空間 (target space) : 各  $x$  での場  $\phi(x) \in \mathbb{R}$  の空間

物理的な空間はベース空間  $\Rightarrow$  時刻一定面のベース空間を分割して EE を定義



Partition of Base Space



Partition of Target Space

# 弦理論とエンタングルメント・エントロピー

弦理論：通常、弦の第一量子化で定式化（第二量子化がよくわかってない）

例) ボソン弦の第一量子化の作用

$$S_{\text{WS}} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu X^a(\sigma) \partial_\nu X^b(\sigma) G_{ab}(X) \quad (6)$$

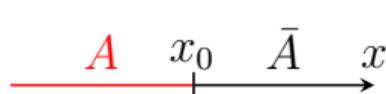
- ▶ ベース空間：弦の世界面
- ▶ ターゲット空間：各  $X^a(\sigma)$  の値で張られる空間 ( $a = 0, \dots, 25$ )  
⇒ 第一量子化での物理的な空間はターゲット空間

ターゲット空間の分割による EE を計算する方法が必要

## 問題点

- ▶ 問題点：第一量子化の EE をどう定義するのか？

例) 点粒子の第一量子化の Hilbert 空間  $\mathcal{H} = \text{span}\{|x\rangle : x \in \mathbb{R}\}$  を  $0 + 1$  次元の場の理論のターゲット空間と見なす。



ターゲット空間を左図のように分割

$$\mathcal{H} = \mathcal{V}_A \oplus \mathcal{V}_{\bar{A}} \quad (7)$$

$$\mathcal{V}_A = \text{span}\{|x\rangle : x \in A\} \quad (8)$$

$$\mathcal{V}_{\bar{A}} = \text{span}\{|x\rangle : x \in \bar{A}\} \quad (9)$$

ターゲット空間の分割は Hilbert 空間の直和分解  $\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}$  ではない！

# 発表の概要

主題：第一量子化での EE を定式化したい

⇒ von Neumann 代数を用いて定式化できそう？

▶ 非相対論的場の理論と代数的 EE

第一量子化でターゲット空間を分割した EE } 完全に一致  
第二量子化でベース空間を分割した EE }

▶ 相対論的場の理論と代数的 EE

第一量子化でのターゲット空間の EE :  $S_{EE} = H(p_A, 1 - p_A)$

第二量子化でのベース空間の EE :  $S_{EE} \approx S_0 + H(p_A, 1 - p_A)$

⇒ 第一量子化は、第二量子化の EE の一部しか計算できない

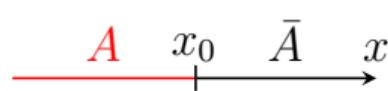
導入

非相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

結論と展望

## von Neumann 代数と EE



領域  $A$  の観測可能量  $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  ( $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ :  $\mathcal{H}$  の線形演算子)  
 $\Rightarrow$  和・積・スカラー倍・Hermite 共役で閉じてる  
 $\Rightarrow$  von Neumann 代数 (以下 vN 代数) を満たす

- ▶  $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$  と直和分解すると、 $\mathcal{H}$  と  $\mathcal{A}$  について以下の分解が存在

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha} \left( \mathcal{H}_{A,\alpha} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A},\alpha} \right) \quad (10)$$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{\alpha} \left( \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A,\alpha}) \otimes \frac{I_{\bar{A},\alpha}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A},\alpha})} \right) \quad (11)$$

- ▶ Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  上の状態  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  を考えると、 $\forall \mathcal{O}_A \in \mathcal{A}$  について

$$\exists \rho_A \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \text{Tr}[\rho \mathcal{O}_A] = \text{Tr}[\rho_A \mathcal{O}_A]$$

## von Neumann 代数と EE

- ▶  $\mathcal{H}_\alpha$  への射影  $\Pi_\alpha$  を用いて  $\mathcal{H}_\alpha$  上の状態  $\rho_{\alpha\alpha} = \Pi_\alpha \rho \Pi_\alpha$  を導入し、確率分布  $p_\alpha$  を用いて  $p_\alpha \rho_{A,\alpha} \equiv \text{Tr}_{\bar{A},\alpha}[\rho_{\alpha\alpha}]$  と定義すると、(11) 式より  $\rho_A \in \mathcal{A}$  は以下

$$\rho_A = \bigoplus_{\alpha} \left( p_\alpha \rho_{A,\alpha} \otimes \frac{I_{\bar{A},\alpha}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A},\alpha})} \right) \quad (12)$$

- ▶ EE は  $\tilde{\rho}_A = \bigoplus_{\alpha} p_\alpha \rho_{A,\alpha}$  を用いて以下で定義

$$\begin{aligned} S(\tilde{\rho}_A) &\equiv -\text{Tr}_A[\tilde{\rho}_A \log \tilde{\rho}_A] = -\sum_{\alpha} \text{Tr}_{A,\alpha}[p_\alpha \rho_{A,\alpha} \log(p_\alpha \rho_{A,\alpha})] \\ &= -\underbrace{\sum_{\alpha} p_\alpha \log p_\alpha}_{\text{Shannon(classical)}} + \underbrace{\sum_{\alpha} p_\alpha S(\rho_{A,\alpha})}_{\text{von Neumann(quantum)}} \end{aligned}$$

## 第一量子化と von Neumann 代数

- ▶ 1 粒子ボソンの第一量子化の Hilbert 空間分割を、vN 代数から以下で再現

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \bigoplus_{\alpha} \left( \mathcal{H}_{A,\alpha} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A},\alpha} \right) \quad (\alpha = 0, 1 : \text{領域 } A \text{ の粒子数}) \\ &= (\mathcal{H}_{A_0} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_0}) \oplus (\mathcal{H}_{A_1} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_1}) \\ &= (\mathbb{C} \otimes \mathcal{V}_{\bar{A}}) \oplus (\mathcal{V}_A \otimes \mathbb{C}) = \mathcal{V}_A \oplus \mathcal{V}_{\bar{A}}\end{aligned}\tag{13}$$

- ▶ vN 代数の EE はターゲット空間の分割による EE  
 $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  に対する部分領域  $A$  の EE は、 $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle + |\psi_{\bar{A}}\rangle$  として、

$$p_0 \rho_{A_0} = |\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|, \quad p_1 \rho_{A_1} = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|\tag{14}$$

より、どちらも純粋状態から確率分布の寄与しか残らず、EE は

$$S(\tilde{\rho}_A) = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1\tag{15}$$

## 第一量子化とターゲット空間の EE

$N$  粒子ボソンの第一量子化の Hilbert 空間  $\mathcal{H}_N$  は、1 粒子ボソンの  $\mathcal{H}$  を用いて

$$\mathcal{H}_N \equiv \text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes N}) \equiv \frac{\mathcal{H}^{\otimes N}}{S_N} \quad (S_N : \text{Symmetric group}) \quad (16)$$

直和分解  $\mathcal{H} = \mathcal{V}_A \oplus \mathcal{V}_{\bar{A}}$  に対して、 $N$  粒子 Hilbert 空間は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N &\equiv \frac{\mathcal{H}^{\otimes N}}{S_N} = \frac{(\mathcal{V}_A \oplus \mathcal{V}_{\bar{A}})^{\otimes N}}{S_N} \\ &= \bigoplus_{\alpha=0}^N \left( \frac{\mathcal{V}_A^{\otimes \alpha}}{S_\alpha} \otimes \frac{\mathcal{V}_{\bar{A}}^{\otimes N-\alpha}}{S_{N-\alpha}} \right) \quad (\mathcal{V}_A^0 = \mathcal{V}_{\bar{A}}^0 = \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (17)$$

第一量子化の EE は、

$$S(\tilde{\rho}_A) = - \sum_{\alpha=0}^N \text{Tr}_{A,\alpha} [p_\alpha \rho_{A,\alpha} \log(p_\alpha \rho_{A,\alpha})] \quad (18)$$

## 第二量子化との比較

第二量子化の描像： $\mathcal{H}_N \equiv \text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes N})$  は Fock 空間  $\mathcal{H}_F$  の部分空間

- ▶ Fock 空間：点  $\mathbf{x}$  での粒子数  $n_{\mathbf{x}}$  状態  $|n_{\mathbf{x}}\rangle_{\mathbf{x}}$  に対して、各々生成・消滅演算子  $\hat{a}_{\mathbf{x}}^{(\dagger)}$  を定義して

$$|f\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\prod_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}}!}} \left[ \bigotimes_{\mathbf{x}} (\hat{a}_{\mathbf{x}}^{\dagger})^{n_{\mathbf{x}}} |0\rangle_{\mathbf{x}} \right] \quad (19)$$

で表わせる状態  $|f\rangle$  の集合を基底として張られる空間

- ▶ 今の場合、 $n_{\mathbf{x}_1} + n_{\mathbf{x}_2} + \dots = N$  という条件での Hilbert 空間を  $\text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes N})$  として

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \text{Sym}(\mathcal{H}^{\otimes N}) \quad (20)$$

$$= \bigotimes_{\mathbf{x}} \mathcal{H}_{\mathbf{x}}, \quad \mathcal{H}_{\mathbf{x}} = \text{span}\{|0\rangle_{\mathbf{x}}, |1\rangle_{\mathbf{x}}, \dots\} \quad (21)$$

## 第二量子化との比較

- ▶ Fock 空間を (21) 式で表現すれば、EE は定義から計算可能：

$$\mathcal{H}_F = \left( \bigotimes_{\mathbf{x} \in A} \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \right) \otimes \left( \bigotimes_{\mathbf{x} \in \bar{A}} \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \right) \equiv \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}} \quad (22)$$

- ▶ 第一量子化との比較には、 $\mathcal{H}_A \equiv \bigoplus_{N=0}^{\infty} \text{Sym}(\mathcal{V}_A^{\otimes N})$  から

$$\mathcal{H}_F = \bigoplus_{N, M=0}^{\infty} \left( \text{Sym}(\mathcal{V}_A^{\otimes N}) \otimes \text{Sym}(\mathcal{V}_{\bar{A}}^{\otimes M}) \right) \quad (\text{粒子数 } \infty) \quad (23)$$

$$\supset \bigoplus_{\alpha=0}^N \left( \text{Sym}(\mathcal{V}_A^{\otimes \alpha}) \otimes \text{Sym}(\mathcal{V}_{\bar{A}}^{\otimes N-\alpha}) \right) = \mathcal{H}_N \quad (N \text{ 粒子固定}) \quad (24)$$

$\mathcal{H}_N$  上の状態  $\rho$  は  $\mathcal{H}_F$  上の状態  $\rho_F^{(N)}$  と見なせる

⇒  $\mathfrak{v}N$  代数は、全体の EE から  $N$  粒子に固定した EE を取り出す

導入

非相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

結論と展望

## 相対論的場の理論と2つの局所性

- ▶ “Fock-based” な分解：第一量子化的な描像  
点  $\mathbf{x}$  を占有する粒子数  $n_{\mathbf{x}} (= 0, 1, \dots)$

$$\mathcal{H}_F = \bigotimes_{\mathbf{x}} \mathcal{H}_{\mathbf{x}} \quad \mathcal{H}_{\mathbf{x}} = \text{span}\{|0\rangle_{\mathbf{x}}, |1\rangle_{\mathbf{x}}, \dots\} \quad (25)$$

- ▶ “field-based” な分解：第二量子化的な描像（通常はこちら）  
点  $\mathbf{x}$  に住む場  $\phi(\mathbf{x})$  の自由度

$$\mathcal{H}_{\text{QFT}} = \bigotimes_{\mathbf{x}} \mathcal{P}_{\mathbf{x}} \quad \mathcal{P}_{\mathbf{x}} = \text{span}\{|\phi\rangle_{\mathbf{x}} : \phi \in \mathbb{R}\} \quad (26)$$

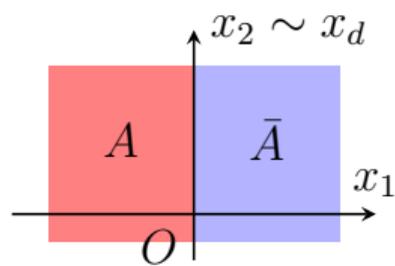
“Fock-based” な場合の真空  $\bigotimes_{\mathbf{x}} |0\rangle_{\mathbf{x}}$  はエンタングルなし  
⇒ “field-based” な描像での計算結果（紫外発散・面積則）と矛盾

## “Fock-based” な場合：第一量子化的描像

▶ “Fock-based” な描像での 1 粒子状態：

$$|\psi\rangle = \int d^d x \psi(\mathbf{x}) \hat{a}_{\mathbf{x}}^\dagger |0\rangle = \int d^d x \psi(\mathbf{x}) |\mathbf{x}\rangle \quad (27)$$

領域の分割はターゲット空間  $\mathbb{R}^d$  の分割： $\mathcal{H} = \mathcal{V}_A \oplus \mathcal{V}_{\bar{A}}$



$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  に対する、部分領域  $A$  の EE は

$$p_A \rho_A = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|, \quad (1 - p_A) \rho_{\bar{A}} = |\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|$$

より、vN 代数の EE を用いて

$$\begin{aligned} S(\tilde{\rho}_A) &= -p_A \log p_A - (1 - p_A) \log (1 - p_A) \\ &= H(p_A, 1 - p_A) : \text{Shannon} \end{aligned} \quad (28)$$

## “field-based” な場合：第二量子化的描像

- ▶ “field-based” な描像での 1 粒子状態

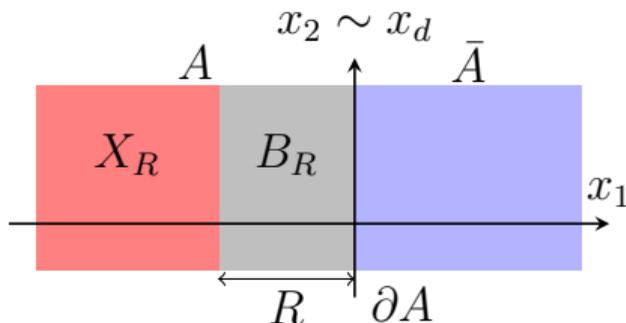
$$|\psi\rangle = \int d^d x f(\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) |\Omega\rangle \quad (29)$$

“Fock-based” な描像に対して、粒子が  $1/m$  だけ広がってる

$$\psi(\mathbf{x}) = \int d^d y K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{y}), \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

- ▶ 質量  $m$  の  $d+1$  次元自由スカラー場理論

⇒ 時刻一定なベース空間  $\mathbb{R}^d$  を以下で分割： $|\tilde{\psi}\rangle = |\psi_{X_R}\rangle + |\psi_{\bar{A}}\rangle$  を考える。



$$f(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in B_R} \sim 0$$

$$R \gg 1/m$$

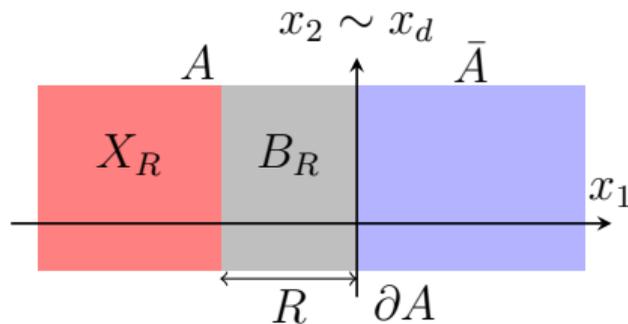
## “field-based” な場合：第二量子化的描像

- ▶ 距離  $R$  だけ離れた系  $X_R$  と系  $\bar{A}$  の演算子  $\mathcal{O}_{X_R}$  と  $\mathcal{O}_{\bar{A}}$  について、

$$\langle \mathcal{O}_{X_R} \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle - \langle \mathcal{O}_{X_R} \rangle \langle \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle \propto e^{-Rm}$$

$R \gg 1/m$  では  $e^{-Rm} \rightarrow 0$  より  $\langle \mathcal{O}_{X_R} \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{O}_{X_R} \rangle \langle \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle$

- ▶ さらに、系  $A$ ,  $\bar{A}$  の大きさを領域  $B_R$  より十分大きくとることで、 $p_{B_R} \rightarrow 0$  より  $X_R \rightarrow A$  であるから、 $\mathcal{O}_{X_R} \rightarrow \mathcal{O}_A$  を用いて  $\langle \mathcal{O}_{X_R} \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle \rightarrow \langle \mathcal{O}_A \mathcal{O}_{\bar{A}} \rangle$



## “field-based” な場合：第二量子化的描像

- ▶  $|\tilde{\psi}\rangle$  について、純粋状態  $|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|$  は4つの項を持つ：

$$|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}| = |\psi_{X_R}\rangle\langle\psi_{X_R}| + |\psi_{X_R}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}| + |\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{X_R}| + |\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|$$

- ▶  $\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}}[|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|]$  の4項目  $\sigma_A \equiv \text{Tr}_{\bar{A}}[|\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|]$  について

$$\begin{aligned}\text{Tr}\left[|\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|\mathcal{O}_A\right] &= \langle\Omega|\mathcal{O}_A\left(\int_{\mathbf{x}\in\bar{A}}d^dxf(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\right)^2|\Omega\rangle \\ &\rightarrow \langle\Omega|\mathcal{O}_A|\Omega\rangle\langle\Omega|\left(\int_{\mathbf{x}\in\bar{A}}d^dxf(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\right)^2|\Omega\rangle \\ &= \langle\Omega|\mathcal{O}_A|\Omega\rangle(1-p_A)\end{aligned}\tag{30}$$

$$\therefore \sigma_A \equiv \text{Tr}_{\bar{A}}[|\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|] \rightarrow \text{Tr}_{\bar{A}}[|\Omega\rangle\langle\Omega|](1-p_A)$$

## “field-based” な場合：第二量子化的描像

同様にして

- ▶ 第1項  $\text{Tr}_{\bar{A}}[|\psi_{X_R}\rangle\langle\psi_{X_R}|] \rightarrow \text{Tr}_A[|\Omega\rangle\langle\Omega|]p_A$
- ▶ 第2項  $\text{Tr}_{\bar{A}}[|\psi_{X_R}\rangle\langle\psi_{\bar{A}}|] \rightarrow 0$
- ▶ 第3項  $\text{Tr}_{\bar{A}}[|\psi_{\bar{A}}\rangle\langle\psi_{X_R}|] \rightarrow 0$

4つの状態のうち、残るのは真空の状態で近似できる2つのみ

$$\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}}[|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|] \rightarrow \text{Tr}_A[|\Omega\rangle\langle\Omega|]p_A + \text{Tr}_{\bar{A}}[|\Omega\rangle\langle\Omega|](1 - p_A) \quad (31)$$

したがって、真空のEEを  $S_0$  として

$$S(\rho_A) = -\text{Tr}_A[\rho_A \log \rho_A] \rightarrow S_0 + H(p_A, 1 - p_A) \quad (32)$$

第一量子化の結果 (28) 式： $S(\tilde{\rho}_A) = H(p_A, 1 - p_A)$  は (32) 式の一部のみ

## 導入

非相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

相対論的な場の理論とターゲット空間のエンタングルメント・エントロピー

## 結論と展望

## 結論と展望

- ▶ 非相対論的場の理論  
第一量子化での、ターゲット空間分割による EE は、代数的定義での EE によって定式化できた。
- ▶ 相対論的場の理論  
第一量子化での代数的定義による EE では、第二量子化による結果の一部しか得られなかった。
- ▶ 弦の第一量子化では、真空の EE も含めた計算は不可能？  
真空の EE が計算できるレプリカ法は、第一量子化にも書き直せる。  
⇒ 計算自体はできるが、第一量子化のみでどう定義するかが問題

今後の課題：第一量子化の枠組みで、真空の EE を定義することが必要