

Ising field theory と conformality

三好 拓己

2020/10/16

目的



目的

A scaling test of 2d Ising model correlation length

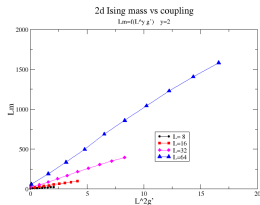
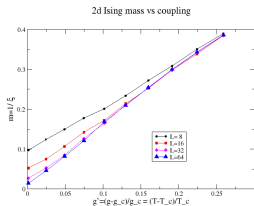
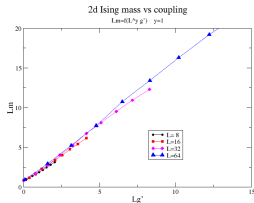
$$g = \frac{kT}{J} \quad m = 1/\xi \sim [(T - T_c)/T_c] = \left[\frac{g - g_c}{g_c} \right] = g'$$

i.e $\nu = 1$ (Onsager)

RG leads to a scaling relation

$$Lm = f(Lg') \quad f(x) \text{ is a universal function}$$

with $f(x) \sim x$ as $x \rightarrow \infty$



目次

2次元 Ising 模型と Onsager 解

フェルミオン系への変換の準備: 双対格子とディスオーダー・パラメータの導入

フェルミオン系への変換

コンフォーマル対称性

結論と展望

2次元 Ising 模型と Onsager 解

スピン自由度

$$\sigma_{\mathbf{x}} = \pm 1 \quad (1)$$

分配関数

$$Z(K, H) = \sum_{\{\sigma_{\mathbf{x}}\}} \exp \left(K \sum_{\mathbf{xy}=nn} \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{y}} + H \sum_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}} \right) \quad (2)$$

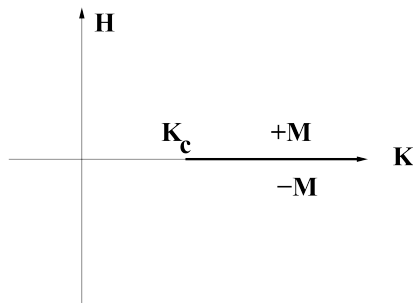
相関関数

$$\langle \sigma_{\mathbf{x}_1} \cdots \sigma_{\mathbf{x}_n} \rangle = \sum_{\{\sigma_{\mathbf{x}}\}} \sigma_{\mathbf{x}_1} \cdots \sigma_{\mathbf{x}_n} \exp \left(K \sum_{\mathbf{xy}=nn} \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{y}} + H \sum_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}} \right) \quad (3)$$

2次元 Ising 模型と Onsager 解

(K, H) 平面では、系は $K_c < K$ の領域で $H = 0$ に一次相転移点を持つ。相転移線は臨界点 $(K = K_c, H = 0)$ を終端とする。

Onsager 解によれば、 $K_c = \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + 1)$ である。

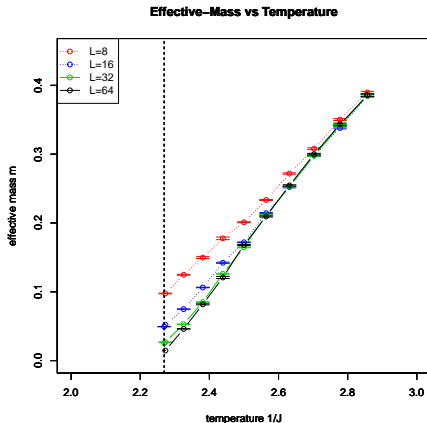


2次元 Ising 模型と Onsager 解

$H = 0$ の場合の相関長は Onsager によって厳密解が求められている。

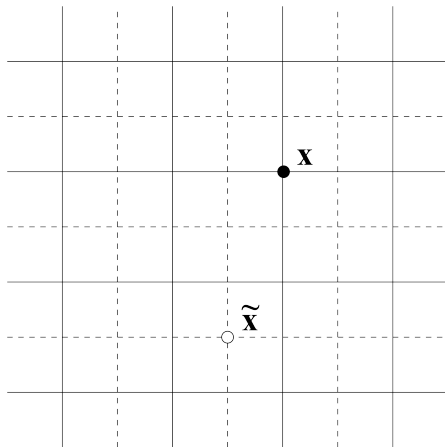
相関長は次のような依存性を持つ。

$$\xi \sim (K - K_c)^{-1} \quad (4)$$



フェルミオン系への変換の準備: 双対格子とディスオーダー・パラメータの導入

双対格子の導入



フェルミオン系への変換の準備: 双対格子とディスオーダー・パラメータの導入

$H = 0$ の場合を考える。

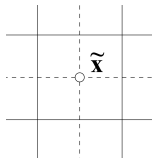
$$Z(K) = \sum_{\{\sigma_x\}} e^{K \sum_{nn} \sigma_x \sigma_y} \quad (5)$$

これを次のリンク変数で書き換える。

$$g_{xy} = \sigma_x \sigma_y \quad (6)$$

g_{xy} の自由度は $g_{xy} = \pm 1$ 。しかし、その全てが独立なわけではない。

$$\prod_{\text{around } \tilde{\mathbf{x}}} g_{xy} = 1 \quad (7)$$



フェルミオン系への変換の準備: 双対格子とディスオーダー・パラメータの導入

それぞれの双対サイト $\tilde{\mathbf{x}}$ に関するデルタ関数は次のように書き換えられる。

$$\delta \left(\prod_{\text{around } \tilde{\mathbf{x}}} g_{\mathbf{xy}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1} \left[\prod_{\text{around } \tilde{\mathbf{x}}} g_{\mathbf{xy}} \right]^{(1-\mu)/2} \quad (8)$$

これをそれぞれの双対サイト $\tilde{\mathbf{x}}$ について導入すれば、分配関数は次のようになる。

$$Z(K) = \frac{1}{2^N} \sum_{\{g_{\mathbf{xy}}\}} e^{K \sum_{nn} g_{\mathbf{xy}}} \prod_{\tilde{\mathbf{x}}} \sum_{\mu_{\tilde{\mathbf{x}}}=\pm 1} \left[\prod_{\text{around } \tilde{\mathbf{x}}} g_{\mathbf{xy}} \right]^{(1-\mu_{\tilde{\mathbf{x}}})/2} \quad (9)$$

フェルミオン系への変換の準備: 双対格子とディスオーダー・パラメータの導入

g_{xy} の総和をそれぞれ実行して変形すると次のようになる。

$$Z(K) = \frac{e^{2NK}}{2^N \cosh^{2N} \tilde{K}} \sum_{\{\mu_{\tilde{x}}\}} e^{\tilde{K} \sum_{nn} \mu_{\tilde{x}} \mu_{\tilde{y}}} \quad (10)$$

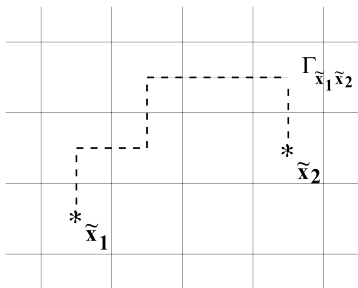
これは元の Ising 模型と同じ形式となっており、変数が $\sigma \rightarrow \mu$, パラメータが $K \rightarrow \tilde{K}$ と置き換えられている。

このとき導入された $\mu_{\tilde{x}}$ を **ディスオーダー・パラメータ** と呼ぶことにする。

フェルミオン系への変換

双対格子上的端点 $\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2$ を持つ開曲線 $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{x}}_1\tilde{\mathbf{x}}_2}$ に対して、次のような因子 T を導入する。

$$T\{\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{x}}_1\tilde{\mathbf{x}}_2}\} = e^{-2K \sum_{xy \perp \tilde{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{x}}_1\tilde{\mathbf{x}}_2}} \sigma_x \sigma_y} \quad (11)$$



フェルミオン系への変換

この期待値を計算すると、双対格子上の2点相関関数と一致する。

$$\langle T\{\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}\} \rangle = \langle \mu_{\mathbf{x}_1} \mu_{\mathbf{x}_2} \rangle \quad (12)$$

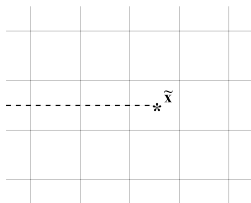
さらに、元の格子のスピンを挿入すると、曲線の $\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}$ の軌跡によって符号が変わる $x_1, \dots, x_n, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ の2価関数となる。

$$\langle \sigma_{\mathbf{x}_1} \dots \sigma_{\mathbf{x}_n} T\{\tilde{\Gamma}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}\} \rangle \quad (13)$$

フェルミオン系への変換

一方の端点 $\tilde{\mathbf{x}}$ から左に無限遠点まで伸ばした軌跡を $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{x}}}$ として、新たなディスオーダー・パラメータを次のように定義する。

$$\mu_{\tilde{\mathbf{x}}} = T\{\tilde{\Gamma}_{\tilde{\mathbf{x}}}\} \quad (14)$$

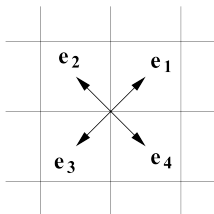


これによって、 σ, μ の両方を含んだ期待値を定義できる。

$$\langle \sigma_{\mathbf{x}_1} \cdots \sigma_{\mathbf{x}_n} \mu_{\tilde{\mathbf{x}}_1} \cdots \mu_{\tilde{\mathbf{x}}_m} \rangle \quad (15)$$

フェルミオン系への変換

全てのサイトの近傍には4つの双対サイトがある。双対サイトの座標は以下のようなベクトルを導入すると $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_a$ と書ける。



これを用いてフェルミオンを次のように導入する。

$$\psi_{a,\mathbf{x}} = \sigma_{\mathbf{x}} \mu_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_a} \quad (16)$$

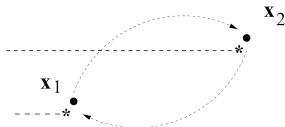
フェルミオン系への変換

離散的運動方程式

$$\psi_{a,x} = (\cosh 2K)\psi_{a+1,x} - (\sinh 2K)\psi_{a+2,x+n_{a+1}} \quad (17)$$

$\psi_{a,x}$ が自由場であることを表している。

$\psi_{a,x}$ が反交換であることは直感的にも理解できる。



フェルミオン系への変換

臨界点 K_c 付近を考える。

$$K = K_c + k \quad (18)$$

相関距離が格子間隔より十分に大きい場合、 ψ は a に関して2つのモードが表れる

$$\psi_{a,x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{i\pi}{4}a} \psi_x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{i\pi}{4}a} \bar{\psi}_x \quad (19)$$

フェルミオン系への変換

離散的運動方程式。便宜上差分を微分で表している。

$$\begin{aligned}(\partial_1 + i\partial_2)\psi_{\mathbf{x}} &= im\bar{\psi}_{\mathbf{x}} \\ (\partial_1 - i\partial_2)\bar{\psi}_{\mathbf{x}} &= im\psi_{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{20}$$

これはマヨラナ・フェルミオンの方程式である。
パラメータの関係式

$$\epsilon m = 4k, \quad \epsilon : \text{lattice unit}\tag{21}$$

連続極限は、相関長 m^{-1} を一定に保ちつつ $k \rightarrow 0$ とすることで実現できる。

フェルミオン系への変換

自由フェルミオン系

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{FF}} &= \frac{1}{2\pi} \int [\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi} + im \bar{\psi} \psi] d^2x \\ \partial &= \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)\end{aligned}\tag{22}$$

臨界点上の格子理論の連続体極限をとると $m = 0$ となる。
このとき、明らかに理論はスケール不変となる。

コンフォーマル対称性

エネルギー運動量テンソルのトレースを計算すると以下のようになる。

$$T_{xx} + T_{yy} = -\frac{im}{2\pi} \bar{\psi} \psi \quad (23)$$

臨界点上ではコンフォーマル対称性を持つ。

結論と展望