Constraints on symmetry from holography

D. Harlow and H. Ooguri

PRL 112 (2019) no.19, 191601 [arXiv:1810.05337]

arXiv:1810.05338

量子重力についての予想

・Charles-Misner-Wheeler, Annals Phys. 2, 525 (1957)
・Polchinski, Int. J. Mod. Phys. A19S1, 145 (2004)
・Banks-Seiberg, Phys. Rev. D83, 084019 (2011)

1．量子重力理論にはグローバル対称性が存在しえない

今日はここだけ紹介

2．量子重力理論では、もし内部ゲージ対称性が存在するならば、
その全ての既約表現の物体が理論に含まれていないといけない

3．量子重力理論では、内部ゲージ対称性の群はコンパクトでなければならない

この論文の主張：AdS/CFT対応を仮定すれば、1,2,3は真である

目次

1. AdS/CFTのreview
2. 準備
    - Bulk reconstruction
    - Bulk locality
    - グローバル対称性のSplittability
3. Statementの証明

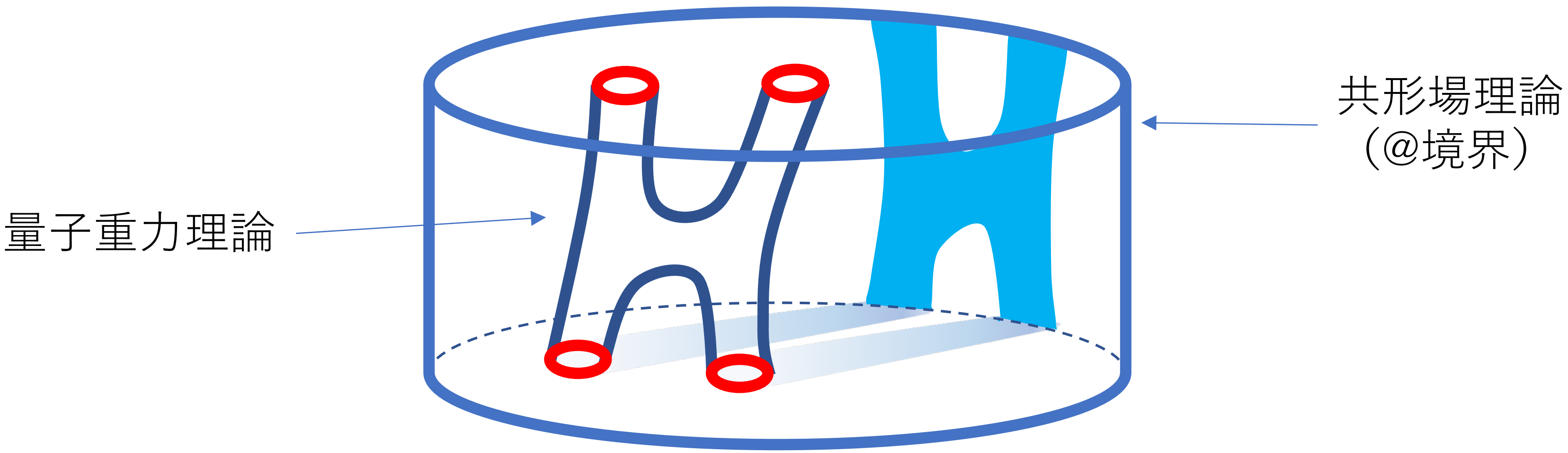
1. AdS/CFT対応のreview

AdS/CFT対応

「漸近的にAdS_{d+1}となる時空」上の任意の量子重力理論は、
AdSの境界（$R\times S^{d-1}$）上に定義されるある共形場理論と等価である

「漸近的にAdS_{d+1}となる時空」とは、rが大きいときに以下の計量になるような時空

$$ds^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega_{d-1}^2$$



AdS/CFTにおける演算子の対応

重力側の任意の場 $\phi(r,t,\Omega)$ に対して、以下の（演算子としての）
関係式を満たす共形場理論のプライマリー演算子 $\mathcal{O}(t,\Omega)$ が存在

$$\mathcal{O}(t,\Omega) = \lim_{r\to\infty} r^{\Delta}\phi(r,t,\Omega)$$

[$\Delta : \mathcal{O}$ の共形次元]

例： CFTのエネルギー運動量テンソル ⇔ Bulkの計量
CFTのグローバル対称性カレント ⇔ Bulkのゲージ場

この論文では、AdS/CFT対応や上の関係式が成り立つことを常に仮定する

2. 準備

- Bulk reconstruction
- Bulk locality
- グローバル対称性のSplittability

Bulk reconstruction

$$\mathcal{O}(t,\Omega) = \lim_{r\to\infty} r^{\Delta}\phi(r,t,\Omega) \qquad \phi_{AdS} \to \mathcal{O}_{CFT}$$

この逆の関係式はあるか？ $\mathcal{O}_{CFT} \to \phi_{AdS}$ （Bulk reconstruction）

・Global reconstruction
・AdS/Rindler reconstruction
・Entanglement wedge reconstruction

Global reconstruction

- Quantized free scalar in AdS$_{d+1}$

$$\phi(r,t,\Omega) = \sum_{nl\vec{m}} (f_{nl\vec{m}}(r,t,\Omega) a_{nl\vec{m}} + h.c.)$$

$$f_{nl\vec{m}}(r,t,\Omega) = \Psi_{nl}(r) e^{-i\omega_{nl}t} Y_{l\vec{m}}(\Omega)$$

$$\Psi_{nl}(r) = N_{nl} r^{-\Delta}(1+\mathcal{O}(r^{-2}))$$

$$\omega_{nl} = \Delta + l + 2n$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(t,\Omega) &= \lim_{r\to\infty} r^{\Delta}\phi(r,t,\Omega) \\ &= \sum_{nl\vec{m}} (N_{nl} e^{-i\omega_{nl}t} Y_{l\vec{m}}(\Omega) a_{nl\vec{m}} + h.c.)\end{aligned}$$

$$a_{nl\vec{m}} = N_{nl}^{-1} \int dt e^{i\omega_{nl}t} \int d\Omega Y^*_{l\vec{m}} \mathcal{O}_+(t,\Omega)$$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_+ + \mathcal{O}_-$ Positive/negative frequency parts

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \int_{S_x} dX K(x;X) \mathcal{O}(X)$$

x : bulk coordinates
X : boundary coordinates

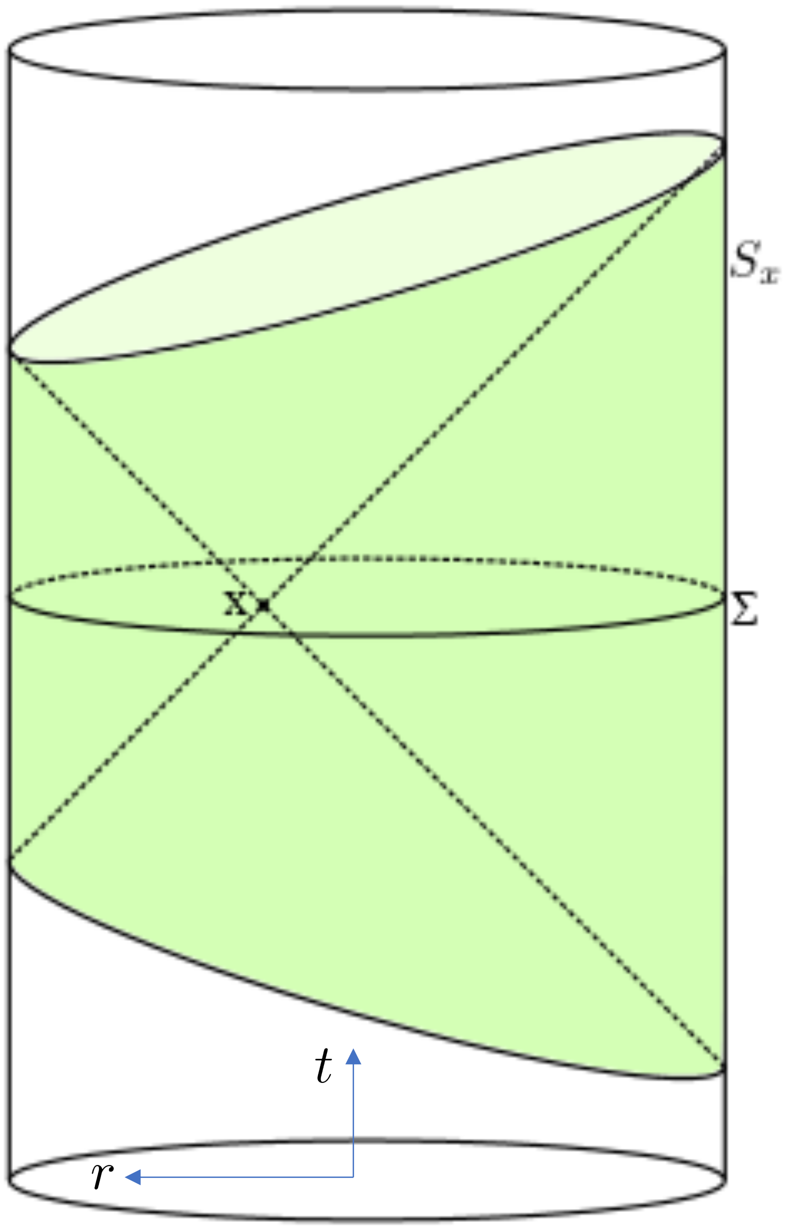
◆ Global reconstructionの積分領域

$$\phi(x) = \int_{S_x} dX K(x;X)\mathcal{O}(X)$$

◆ 相互作用するスカラー場の場合でも、相互作用の効果を摂動的に加えることができる。

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int dx'\phi(x')\overbrace{(\Delta' - m^2)G(x,x')}^{\delta(x-x')} \\ &= \int dx' G(x,x')\underbrace{(\Delta' - m^2)\phi(x')}_{= g\phi(x')^3 \text{ for } \phi^4 \text{theory}} + \int_{S_x} dX K(x;X)\mathcal{O}(X) \\ &= \cdots\end{aligned}$$

以下この式を再帰的につかう



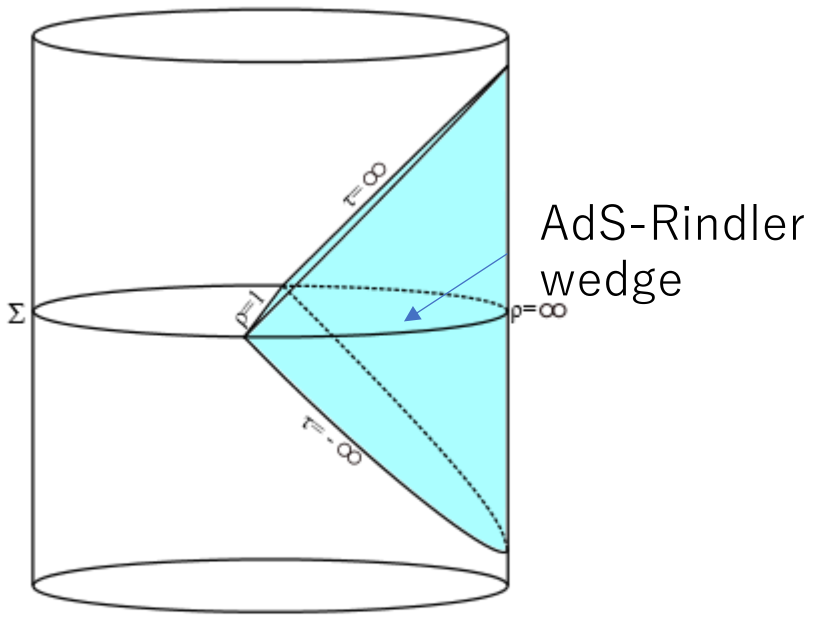
Harlow, arXiv:1802.01040v3

AdS/Rindler reconstruction

- **AdS-Rindler wedge**

$$ds^2 = (\rho^2 - 1)d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\rho^2 - 1} + \rho^2 dH_{d-1}^2, \qquad dH_{d-1}^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi d\Omega_{d-2}^2$$

AdS空間の一部を覆う座標



Harlow, arXiv:1802.01040v3

- **Quantized scalar in AdS-Rindler wedge**

$$\phi(\rho, \tau, \alpha) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sum_\lambda (f_{\omega\lambda}(\rho, \tau, \alpha) a_{\omega\lambda} + h.c.)$$

- **AdS-Rindler reconstruction**

$$\phi(x) = \int dX \hat{K}(x, X)\mathcal{O}(X)$$

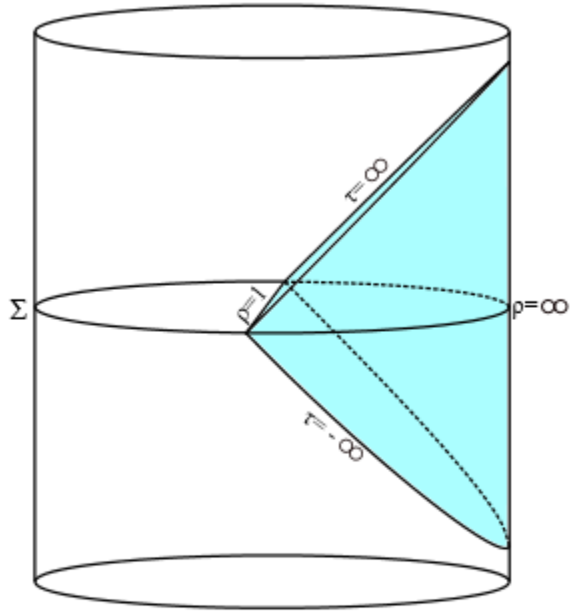
x, X はそれぞれAdS-Rindler wedge内の
Bulk, boundaryの座標

Subregion duality

◆ AdS-Rindler wedge内のbulkの場はその境界から構成できるし、逆も可。

$$\phi(x) = \int dX \hat{K}(x, X)\mathcal{O}(X)$$

AdS-Rindler wedge内で
閉じたduality



Harlow, arXiv:1802.01040v3

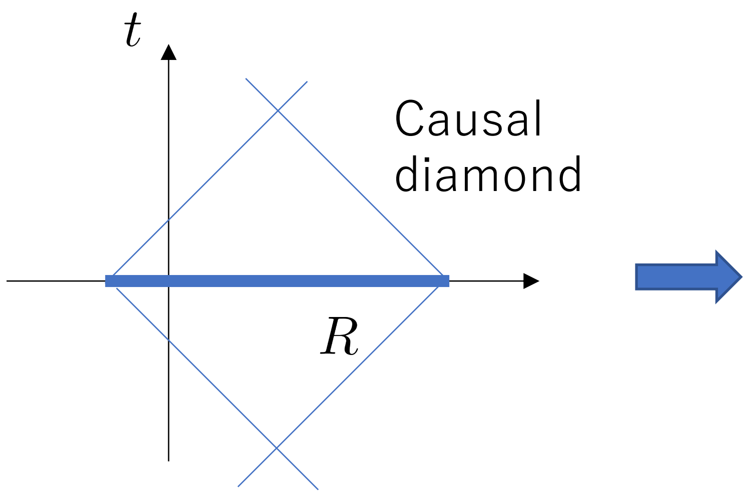
◆ もっと小さな領域で閉じたdualityはあるか？ → Entanglement wedge

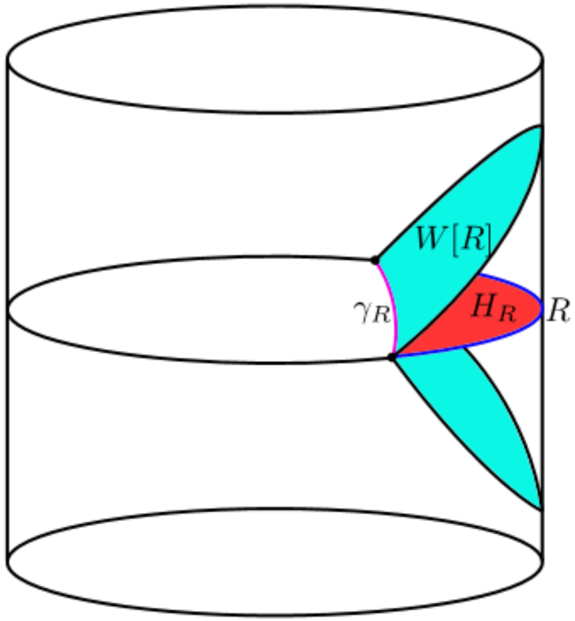
Entanglement wedge reconstruction

◆ Entanglement wedge

Harlow, arXiv:1802.01040v3

任意の境界上の領域Rに対して





Entenglement wedge:
Causal diamondを境界とする
Minimal Hyper surface
に囲まれる部分

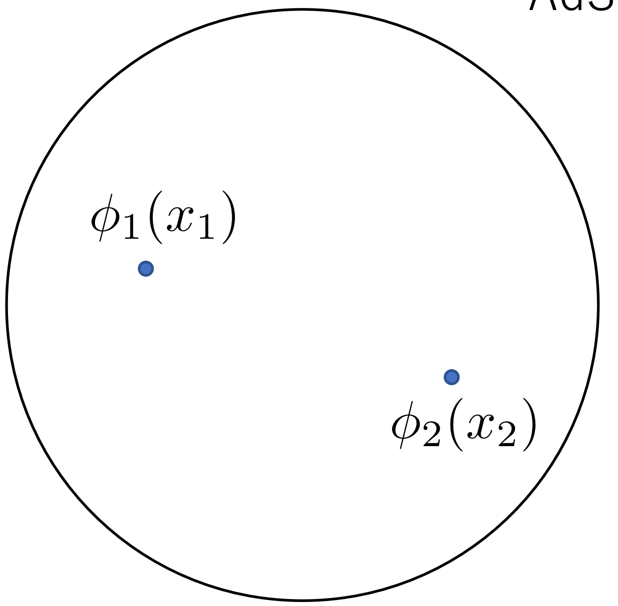
◆ Entanglement wedgeについてもsub-dualityがあると考えられている

Harlow, [arXiv:1802.01040].
cf. Akers-Levine, “Large Breakdowns of Entanglement Wedge Reconstruction” [arXiv: 1908.03975]

Bulk locality

- Space likeに離れたbulkの演算子は交換する

AdS空間のtime slice



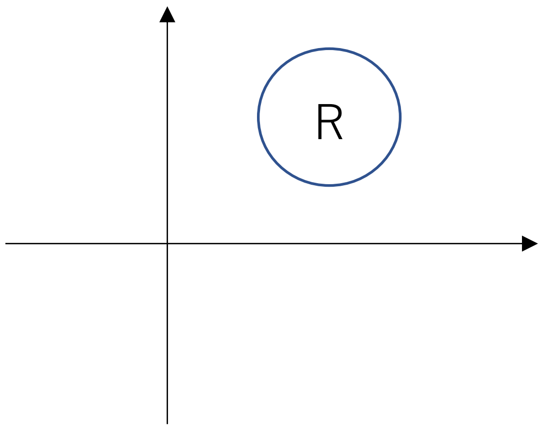
$$[\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)] = 0$$

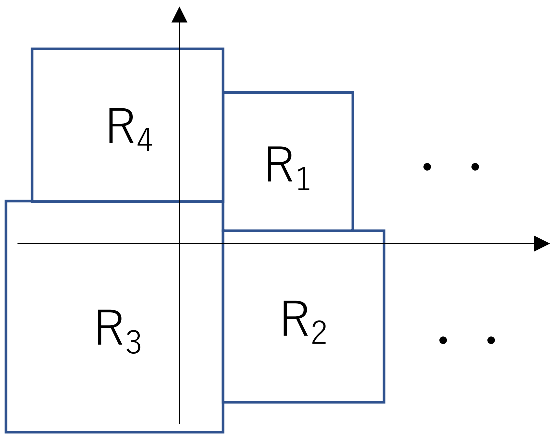
- Reconstructionで作られたbulkの場がこれを満たすかどうかはかなり非自明な問題。
  しかしAdS/CFT対応が成立するなら満たされているはずである。ここではそれを仮定。

グローバル対称性のSplittability

グローバル対称性の場合、任意の空間領域Rに対して、
R内の演算子のみに作用するような演算子 $U(g,R)$ が作れる。

（格子理論だと、$U(g,R)$ はR内のサイトの場のみ変換する演算子
Noetherカレントが構成できれば、$U(e^{i\epsilon^a T_a},R) := e^{i\epsilon^a \int_R J_a^0}$ で作れる）





空間を分割すれば
変換も分割できる

$$U(g) = U(g,R_1)U(g,R_2)\cdots$$

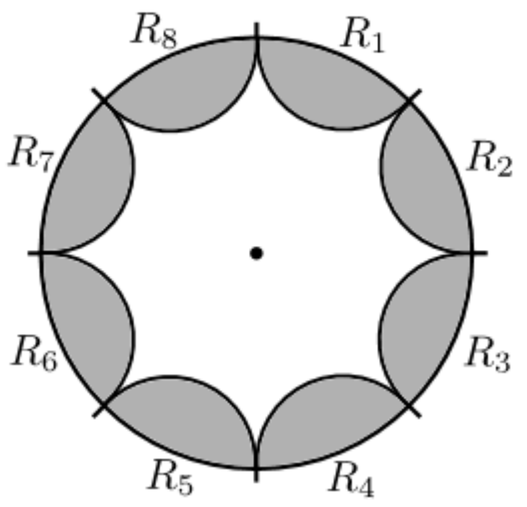
3. Statementの証明

・量子重力理論にグローバル対称性があると仮定する。

→ 境界のCFTにも同じグローバル対称性が存在する

→ 境界上の変換を、splittabilityにより分割する

$$U(g) = U(g, R_1)U(g, R_2)\cdots$$



→ 各 R_i を十分小さくとれば、R_i のEntanglement wedgeがbulk内部まで届かない

→ Entanglement wedgeにおけるsub-dualityと、bulkのlocalityから、
bulk内部の演算子は全ての $U(g, R_i)$ と可換。したがって $U(g)$ とも可換

→ Bulk内部でchargeを持ったものが全くない　矛盾

従ってbulkの重力理論はグローバル対称性を持てない

まとめ

1．量子重力理論にはグローバル対称性が存在しえない　今日はここだけ紹介

2．量子重力理論では、もし内部ゲージ対称性が存在するならば、
その全ての既約表現の物体が理論に含まれていないといけない

3．量子重力理論では、内部ゲージ対称性の群はコンパクトでなければならない

この論文の主張：AdS/CFT対応を仮定すれば、1,2,3は真である