# On the model discriminating power of $\mu \to e$ conversion in nuclei

Vincenzo Cirigliano, Ryuichiro Kitano, Yasuhiro Okada, Paula Tuzon
Review of arXiv:0904.0957

M2 羽山　徹

October 18, 2019

# What is $\mu \to e$ conversion?

# Charged Lepton Flavor Violation

## Lepton Flavor Violation(LFV)

Lepton の flavor を非保存にする過程。Standard Model では許されていないが、近年 neutrino 振動が発見された。

## Charged Lepton Flavor Violation(CLFV)

電荷 lepton の LFV。未だ実験的には観測されていない。$\mu \to e\gamma$、$\mu \to \bar{e}ee$、$\mu N \to eN$ 等が着目されており、実験が続いている。

## $\mu \to e$ Conversion

muonic atom 中の $\mu$ が原子核と何らかの相互作用を経て、$e$ になって飛び出す現象。KEK や Fermilab で測定実験が行われ、今も精度を上げた測定が計画されている。

## 全体の流れ

(1) $\mu \to e$ conversion を引き起こすような項を weak scale の SM Lagrangian に追加 ($\mathcal{L}_0(q, \mu, e) = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_{\mu e}$)

(2) heavy quark を integrate out($\mathcal{L}'_0(u, d, s, \mu, e) = \mathcal{L}'_{SM} + \mathcal{L}'_{\mu e}$)

(3) Lagrangian を nucleon で記述 ($\mathcal{L}(p, n, \mu, e) = \mathcal{L}''_{SM} + \mathcal{L}''_{\mu e}$)

(4) convertion rate を計算

(5) 幾つかのモデルに当てはめ

$\mathcal{L}_0$、$\mathcal{L}'_0$、$\mathcal{L}$ が全て等価＝予言される物理量が等しい
⇒SM Lagrangian 由来の部分に関して物理量が変化しないような置き換えを考え、それを追加部分にも適応する

# Detail Calculation

# Lagrangian (1)

未知の粒子と相互作用がスケール $\Lambda$ に存在
integrate out $\Rightarrow \frac{1}{\Lambda^2} \times$(mass dimension six operator) が出現と仮定
$\mu \to e$ conversion を引き起こしうる operator ($=\bar{e}\mu \times \cdots$) を幾つか選び、その確率を計算する

operator には CLFV を引き起こす effective Lagrangian として最も一般的な

1) photon との相互作用 (Dipole)
2) quark との相互作用 (scalar and vector)
3) gluon との相互作用

の三つを選択

# Lagrangian (2)

係数の $L$、$R$ は $e$ の chirality

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{\Lambda^2}\Big[\big(C_{DR} m_\mu \bar{e}\sigma^{\rho\nu} P_L \mu + C_{DL} m_\mu \bar{e}\sigma^{\rho\nu} P_R \mu\big) F_{\rho\nu}$$
$$+ \sum_q \big(C^q_{VR} \bar{e}\gamma^\rho P_R \mu + C^q_{VL} \bar{e}\gamma^\rho P_L \mu\big) \bar{q}\gamma_\rho q$$
$$+ \sum_q \big(C^q_{SR} m_\mu m_q G_F \bar{e} P_L \mu + C^q_{SL} m_\mu m_q G_F \bar{e} P_R \mu\big) \bar{q} q$$
$$+ \big(C_{GR} m_\mu G_F \bar{e} P_L \mu + C_{GL} m_\mu G_F \bar{e} P_R \mu\big) \frac{\beta_H}{2 g_s^3} G_a^{\rho\nu} G^a_{\rho\nu} + h.c.\Big]$$

# Heavy Quarks Integrate Out

SM Lagrangian $\mathcal{L}_{SM}$ と、そこから heavy quark を integrate out した理論 $\mathcal{L}'_{SM}$ を考える。 Energy momentum tensor のトレースに関して

$$\langle Z, A|\theta^{\mu}{}_{\mu}|Z, A\rangle = \langle Z, A|\theta'^{\mu}{}_{\mu}|Z, A\rangle$$

また、運動方程式を代入することで naive に

$$\theta^{\mu}{}_{\mu} = \frac{\beta_H(g_s)}{2g_s^3} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a + m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s + \sum_{h=c,t,b} m_h \bar{h}h + \cdots$$

$$\theta'^{\mu}{}_{\mu} = \frac{\beta_L(g_s)}{2g_s^3} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a + m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s + \cdots$$

$$\Rightarrow \sum_{h=c,t,b} m_h \bar{h}h \approx \frac{\beta_L(g_s) - \beta_H(g_s)}{2g_s^3} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a$$

# Quarks to Nucleons

quark で記述された Lagrangian を nucleon で記述するために、Lagrangian に次のような置き換えを施した前後で同じ物理を記述していると仮定する。($N = p, n$)

$$m_q \bar{q} q \to \sum_N f^q_{SN} m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$

$$\bar{q} \gamma^\mu q \to \sum_N f^q_{VN} \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi$$

$$\frac{\beta_L}{2 g_s^3} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a \to \sum_N f_{GN} m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$

この置き換えによって、nucleon の mass term が正しく記述されること、current が保存されていることが要求される。

# Quarks to Nucleons (scalar term)

$$m_q \bar{q} q \to \sum_N f^q_{SN} m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$

定数の部分は任意の $|Z, A\rangle$ で挟んだ時に両辺が等しくなるように決定。
例えば u に関して proton で挟むと、

$$\begin{aligned} \langle p | m_u \bar{u} u | p \rangle &= f^u_{Sp} m_p \langle p | \bar{\psi}_p \psi_p | p \rangle \\ f^u_{Sp} &= \frac{\langle p | m_u \bar{u} u | p \rangle}{m_p \langle p | \bar{\psi}_p \psi_p | p \rangle} \\ &= \frac{m_u}{m_u + m_d} (1 + \xi) \frac{\sigma_{\pi N}}{m_p} \end{aligned}$$

このように、$\sigma$ term $\sigma_{\pi N}$、isospin-breaking $\xi$、strangeness content $y$ の三つのパラメータだけで全ての $f^q_{SN}$ を表現することが出来る。

# Quarks to Nucleons (vector term)

$$\bar{q}\gamma^\mu q \to \sum_N f^q_{VN} \bar{\psi}_N \gamma^\mu \psi$$

current が保存する必要があるため、

$$f^u_{Vp} = 2 \quad , \quad f^d_{Vp} = 1 \quad , \quad f^s_{Vp} = 0$$
$$f^u_{Vn} = 1 \quad , \quad f^d_{Vn} = 2 \quad , \quad f^s_{Vn} = 0$$

# Gluon to Nucleons

$$\frac{\beta_L}{2g_s^3} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \to f_{GN} m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$

scalar term と gluon term の置き換えの前後で、energy momentum tensor のトレースが変化しないので

$$\sum_q m_q \bar{q} q + \frac{\beta_L}{2g_s^3} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \to \sum_N \left( \sum_q f^q_{SN} + f_{GN} \right) m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$
$$\approx \sum_N m_N \bar{\psi}_N \psi_N$$

が成立するため、理論から $f_{GN}$ を消去することが可能

# Lagrangian (arranged)

最終的に、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}''_{SM} - \frac{1}{\Lambda^2}\Big[\big(C_{DR} m_\mu \bar{e}\sigma^{\rho\nu} P_L \mu + C_{DL} m_\mu \bar{e}\sigma^{\rho\nu} P_R \mu\big) F_{\rho\nu}$$
$$+ \sum_N \big(\tilde{C}^N_{VR} \bar{e}\gamma^\rho P_R \mu + \tilde{C}^N_{VL} \bar{e}\gamma^\rho P_L \mu\big) \bar{\psi}_N \gamma_\rho \psi_N$$
$$+ \sum_N \big(\tilde{C}^N_{SR} m_\mu m_N G_F \bar{e} P_L \mu + \tilde{C}^N_{SL} m_\mu m_N G_F \bar{e} P_R \mu\big) \bar{\psi}_N \psi_N + h.c.\Big]$$

が得られる。

# Calculate the Convertion Rate(1)

欲しいものは

$$\int d^3x \, \langle Z, A|\mathcal{O}(x)|Z, A\rangle$$

$\mu$、$e$、$F_{\mu\nu}$ に関しては古典解を代入

原子核は静止しているものとして扱うため、

$$\begin{aligned}
\langle Z, A|\bar{\psi}_p\psi_p(x)|Z, A\rangle &= Z\rho_p(x) \\
\langle Z, A|\bar{\psi}_n\psi_n(x)|Z, A\rangle &= (A - Z)\rho_n(x) \\
\langle Z, A|\bar{\psi}_N\gamma^i\psi_N(x)|Z, A\rangle &= 0 \\
\langle Z, A|\bar{\psi}_N\gamma^0\psi_N(x)|Z, A\rangle &= \langle Z, A|\bar{\psi}_N\psi_N(x)|Z, A\rangle
\end{aligned}$$

陽子、中性子の密度関数は幾つかの実験結果を流用する。

# Calculate the Convertion Rate(2)

$$\Gamma_{conv} = \frac{m_\mu^5}{4\Lambda^4}\left|C_{DR}D + 4G_F m_\mu\left(m_p\tilde{C}^p_{SR}S^p + m_n\tilde{C}^n_{SR}S^n\right) + \tilde{C}^p_{VR}4V^p + \tilde{C}^n_{VR}4V^n\right|^2$$
$$+ \frac{m_\mu^5}{4\Lambda^4}\left|C_{DL}D + 4G_F m_\mu\left(m_p\tilde{C}^p_{SL}S^p + m_n\tilde{C}^n_{SL}S^n\right) + \tilde{C}^p_{VL}4V^p + \tilde{C}^n_{VL}4V^n\right|^2$$

$D$、$S^N$、$V^N$ はそれぞれ dipole 、 scalar 、vector の項について積分を実行した結果で、$Z$、$A$ に依存する。

# Calculate the Convertion Rate(3)

利便性の問題上、各原子核への $\mu$ の capture rate で convertion rate を規格化した値を用いて評価する。

$$B_{\mu\to e}(Z) \equiv \frac{\Gamma_{conv}(Z,A)}{\Gamma_{capt}(Z,A)}$$

Dipole type の operator が存在した場合、$\mu \to e$convertion だけでなく、$\mu \to e\gamma$ の相互作用も起こりうる。この場合、$\mu \to e\gamma$ の rate は

$$B_{\mu\to e\gamma} \equiv \frac{\Gamma(\mu \to e\gamma)}{\Gamma(\mu \to e\nu_\mu\bar{\nu}_e)} = \frac{48\pi^2}{G_F^2\Lambda^4}(|C_{DR}|^2 + |C_{DL}|^2)$$

# Testing

# Single operator model(1)

## Dipole model

Lagrangian の定数を

$$C_D \equiv C_{DR} \neq 0 \quad , \quad C_{else} = 0$$

とすれば dipole のみのモデルを記述する。SUSY-GUT model や SUSY see-saw model がこれに該当する。

## Vector model 1

$$C_V \equiv C^u_{VR} = -2C^d_{VR} \neq 0 \quad , \quad C_{else} = 0$$

とすれば、多くの Left-Right symmetric model に当てはまる。

# Single operator model(2)

## Vector model 2

$$C_V \equiv C^u_{VR} = \frac{C^d_{VR}}{a} \neq 0 \quad , \quad C_{else} = 0 \quad , \quad a = -1.73$$

effective Z-penguin に起因するようなモデルがこれに当てはまる。

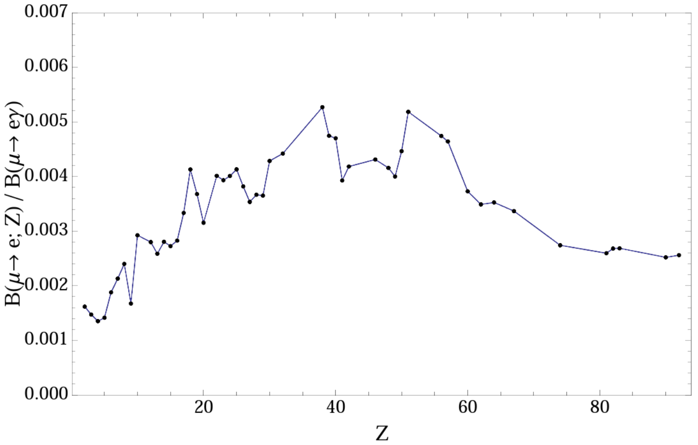
## Scalar model

$$C_S \equiv C^d_{SR} = C^s_{SR} = C^b_{SR} \neq 0 \quad , \quad C_{else} = 0$$

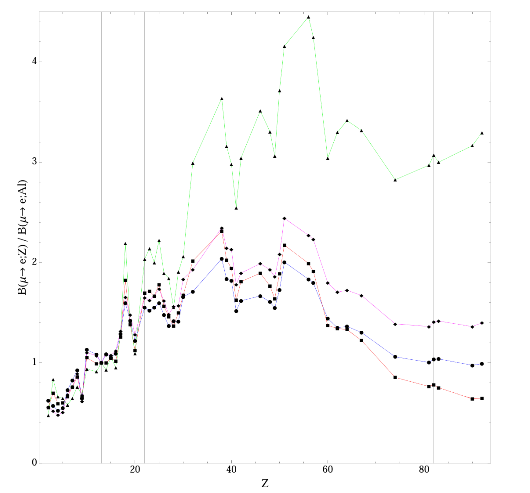
R-parity violating SUSY や R-parity conserving SUSY see-saw model に関連する。

# Single operator model(3)

## $\mu \to e\gamma$ vs $\mu \to e$conversion



# Single operator model(4)




dipole:blue , vector 1:magenta , vector 2:green , scalar:red

# Summary

- ハドロンの不確定性に制限を受けることなく、$\mu \to e$ conversion rate を計算することができる
- どのような physics が根底になっているかを知るためには、単一 operator の場合は二種の原子で conversion rate を測定し、その比率を比べればよい。
- 二つの operator が同程度の強度で効いてくる場合、三種の原子で conversion rate を測定し、その比率を比べれば operator を特定できる。
- scalar operator を含む二種の operator が働いている場合、strange content の不定性が原因で最大 1 桁の誤差が発生するが、今後 lattice が発展し誤差が小さくなれば、将来的に問題にはならない。

# Solution of Dirac e.q.

中心力しか働かない Dirac 方程式は動径方向と角度方向に分離することができ、角度方向の解は規格化することができる。

$$\psi_k^\mu = \begin{pmatrix} g(r)\chi_k^\mu(\theta,\phi) \\ if(r)\chi_{-k}^\mu(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

動径方向の方程式は一階の微分方程式で、Schrödinger equation のように固有値問題として扱うことができない。

$$\frac{d}{dr}u = \begin{pmatrix} -k/r & W-V+m \\ -(W-V-m) & k/r \end{pmatrix} u \quad , \quad u = \begin{pmatrix} rg \\ rf \end{pmatrix}$$

そのため、$u$ が発散せず、かつ $r$ の範囲の両端からこの方程式を解いた際に双方が連続的に繋がるようなエネルギー $W$ と解 $u$ を選ぶ。