A Gravity Theory on Noncommutative Spaces

P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijevic, F. Meyer, P. Schupp and J. Wess
[hep-th/0504183]
P. Aschieri [hep-th/0608172v2]

文献紹介　10/04/2019 M2 : 足立 宏幸

非可換空間

通常の多様体：座標は可換な数($\in \mathbb{R}$)

変形

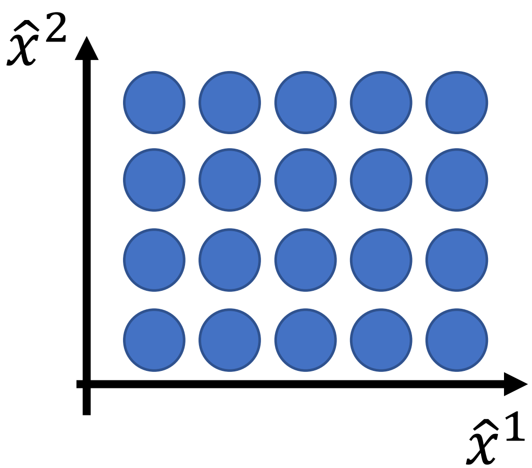
非可換空間：座標を非可換な演算子として扱う

- 純粋な数学的対象として
- 量子重力理論における、ある種の時空の量子化として研究されている

例. θ変形された非可換空間

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}\ \hat{1}$$

$\mu, \nu \in \{1,2,\cdots,D\}$
$\hat{x}^\mu$: 自己随伴作用素(無限次元)
$\theta^{\mu\nu}$: 実定数(反対称)
$\hat{1}$: 恒等作用素
$[A,B] \coloneqq A \cdot B - B \cdot A$
$\cdot$:作用素の積



- 量子力学の相空間 $(\hat{x}, \hat{p})$ の量子化のように、空間上の波束は広がり($\sim\theta^{\mu\nu}$)を持つ
- $\theta^{\mu\nu} \to 0$の極限で普通の可換空間に戻る

この論文の主な主張

- θ変形された非可換空間の微分幾何を構成

- 変形された一般座標変換(diffeo.)の下で不変な、Einstein-Hilbert作用の拡張を求めた

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2}\int d^D x\,(e^* * R^* + \mathrm{c.c.})$$

- 導入
- 非可換空間と$*$-積
- 非可換空間のdiffeo.
- 非可換空間の微分幾何
- まとめとコメント

非可換空間上の関数

関数 $f(x)$ を座標 x^μ の冪展開で表現し、
引数 x^μ を作用素 $\hat{x}^\mu$ に置き換えるのはどうか？

$$\hat{f}(\hat{x}) = c\hat{1} + c_\mu \hat{x}^\mu + c_{\mu\nu}\hat{x}^\mu \cdot \hat{x}^\nu + \cdots$$

非可換空間上の関数＝作用素

問題点.
x^μの2次以上は、作用素に置き換えた際に順序不定性が存在

なにか適当な順序に固定

Wigner-Weyl変換を使うと、Weyl順序に固定できる

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi)^D} f(x) e^{-ik_\mu (x^\mu - \hat{x}^\mu)}$$

W-W変換

$$f(x) = c \rightleftarrows \hat{f}(\hat{x}) = c\hat{1}$$

$$f(x) = x^\mu \rightleftarrows \hat{f}(\hat{x}) = \hat{x}^\mu$$

$$f(x) = x^\mu x^\nu \rightleftarrows \hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{2}(\hat{x}^\mu \cdot \hat{x}^\nu + \hat{x}^\nu \cdot \hat{x}^\mu)$$

関数	W-W 変換	演算子
$f(x)$	$\rightleftarrows$	$\hat{f}$
$g(x)$	$\rightleftarrows$	$\hat{g}$
?	$\rightleftarrows$	$\hat{f} \cdot \hat{g}$

*-積

$$f * g(x) := f(x) e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} g(x)$$

すると、

$$\widehat{f * g} = \int \frac{d^D x d^D k}{(2\pi)^D} f * g(x) e^{-ik_\mu(x^\mu - \hat{x}^\mu)}$$

$$= \hat{f} \cdot \hat{g}$$

が成立

関数	Weyl 変換	演算子
$f(x)$	$\rightleftarrows$	$\hat{f}$
$g(x)$	$\rightleftarrows$	$\hat{g}$
$f * g(x)$	$\rightleftarrows$	$\hat{f} \cdot \hat{g}$

代数構造の同型

非可換化するために演算子を導入したが、
関数と*-積を使えば非可換性を導入できる！

構造まとめ

可換空間 $(C^\infty(M),\cdot)$

$C^\infty(M)$:M上の関数の空間

$\cdot$: 点ごとの積

$$x^\mu \cdot x^\nu - x^\nu \cdot x^\mu = 0$$

θ変形

積の変形をすればよい

非可換空間 $(H,\cdot)$

H : 作用素の空間

$\cdot$: 作用素の積

$$\hat{x}^\mu \cdot \hat{x}^\nu - \hat{x}^\nu \cdot \hat{x}^\mu = i\theta^{\mu\nu}\hat{1}$$

同型

非可換空間 $(C^\infty(M),*)$

$C^\infty(M)$:M上の関数の空間

$*$: $*$-積

$$x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu = i\theta^{\mu\nu}$$

- 導入
- 非可換空間と*-積
- 非可換空間のdiffeo.
- 非可換空間の微分幾何
- まとめとコメント

通常のdiffeo. δ_ξ

Scalar場$f(x)$は、微小diffeo.($x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$)で、

$$\delta_\xi f(x) = f'(x) - f(x) = \xi^\mu(x)\partial_\mu f(x)$$

一般のtensor場に対しては

Scalar:	$\delta_\xi f = \xi^\mu \partial_\mu f$
反変vector:	$\delta_\xi V_\alpha = \xi^\mu \partial_\mu V_\alpha + (\partial_\alpha \xi^\mu) V_\mu$
共変vector:	$\delta_\xi V^\alpha = \xi^\mu \partial_\mu V^\alpha - \left(\partial_\mu \xi^\alpha\right) V^\mu$

変形されたdiffeo. δ_ξ^*

Scalar: $\delta_\xi f = \xi^\mu \partial_\mu f$

反変vector: $\delta_\xi V_\alpha = \xi^\mu \partial_\mu V_\alpha + (\partial_\alpha \xi^\mu) V_\mu$

共変vector: $\delta_\xi V^\alpha = \xi^\mu \partial_\mu V^\alpha - \left(\partial_\mu \xi^\alpha\right) V^\mu$

通常のdiffeo. δ_ξを δ_ξ^* に変形

Scalar: $\delta_\xi^* f \coloneqq \xi^\mu * \partial_\mu f$

反変vector: $\delta_\xi^* V_\alpha \coloneqq \xi^\mu * \partial_\mu V_\alpha + (\partial_\alpha \xi^\mu) * V_\mu$

共変vector: $\delta_\xi^* V^\alpha \coloneqq \xi^\mu * \partial_\mu V^\alpha - \left(\partial_\mu \xi^\alpha\right) * V^\mu$

定理：
$$\overline{R^{\alpha}}(f) * \overline{R_{\alpha}}(g) = g * f \qquad (f, g\text{: 関数})$$
を満たす微分演算子の組$(\overline{R^{\alpha}}, \overline{R_{\alpha}})$が存在する。

証明：
$$g * f = g e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} f = f e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} g$$
$$= f e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} e^{-i\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} g$$
$$= f * e^{-i\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\,\overrightarrow{\partial_\nu}} g$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \theta^{\mu_1\nu_1} \dots \theta^{\mu_n\nu_n} \left(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} f\right) * \left(\partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_n} g\right)$$

例： $\overline{R^0} = 1$, $\overline{R_0} = 1$, $\overline{R^{1_\mu}} = \partial_\mu$, $\overline{R_{1_\mu}} = -i\theta^{\mu\nu}\partial_\nu$ and so on

δ_ξ^*のLeibniz則を定義

$$\overline{R^\alpha}(f) * \overline{R_\alpha}(g) = g * f$$

$$\delta_\xi^*(T * T') \coloneqq \delta_\xi^*(T) * T' + \overline{R^\alpha}(T) * \delta^*_{\overline{R_\alpha}(\xi)}(T')$$

関数f, gに対しては

$$\delta_\xi^*(f * g) \coloneqq \delta_\xi^*(f) * g + \overline{R^\alpha}(f) * \delta^*_{\overline{R_\alpha}(\xi)}(g)$$

$$= \xi^\mu * \partial_\mu f * g + \overline{R^\alpha}(f) * \overline{R_\alpha}(\xi^\mu) * \partial_\mu g$$

$$= \xi^\mu * \partial_\mu f * g + \xi^\mu * f * \partial_\mu g$$

$$= \xi^\mu * \partial_\mu (f * g)$$

$f * g$: scalar場として変換

同様に、一般には

$T^{\mu_1 \cdots \mu_m}_{\nu_1 \cdots \nu_n} * T^{\rho_1 \cdots \rho_r}_{\sigma_1 \cdots \sigma_s}$ ：変形されたdiffeo.の下で

$(m + r, n + s)$階のtensor場として変換

Tensorの添え字の縮約

$$\overline{R^\alpha}(f) * \overline{R_\alpha}(g) = g * f$$

例. $A^\mu * B_\mu$

$$\delta_\xi^*\left(A^\mu * B_\mu\right) \coloneqq \delta_\xi^*(A^\mu) * B_\mu + \overline{R^\alpha}(A^\mu) * \delta^*_{\overline{R_\alpha}(\xi)}\left(B_\mu\right)$$

$$= \xi^\rho * \left(\partial_\rho A^\mu\right) * B_\mu - \left(\partial_\rho \xi^\mu\right) * A^\rho * B_\mu$$

$$+\overline{R^\alpha}(A^\mu) * \left[\overline{R_\alpha}(\xi^\rho) * \left(\partial_\rho B_\mu\right) + \overline{R_\alpha}\left(\partial_\mu \xi^\rho\right) * B_\rho\right]$$

$$= \xi^\rho * \left(\partial_\rho A^\mu\right) * B_\mu - \left(\partial_\rho \xi^\mu\right) * A^\rho * B_\mu$$

$$+\xi^\rho * A^\mu * \left(\partial_\rho B_\mu\right) + \left(\partial_\mu \xi^\rho\right) * A^\mu * B_\rho$$

$$= \xi^\rho * \partial_\rho\left(A^\mu * B_\mu\right)$$

⇒ $A^\mu * B_\mu$: scalar場として変換

高階のTensorの添え字の縮約に関しても同様

- 導入
- 非可換空間と*-積
- 非可換空間のdiffeo.
- 非可換空間の微分幾何
- まとめとコメント

計量の拡張 $g^*_{\mu\nu}$

要請1. $g^*_{\mu\nu}$: 2階のtensor場

$$\delta^*_\xi g^*_{\alpha\beta} = \xi^\mu * \partial_\mu g^*_{\alpha\beta} + (\partial_\alpha \xi^\mu) * g^*_{\mu\beta} + \left(\partial_\beta \xi^\mu\right) * g^*_{\alpha\mu}$$

要請2.

$$\lim_{\theta\to 0} g^*_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$$

多脚場e^a_μを用いると、δ^*_ξ変換に対して
scalar密度として変換する$\sqrt{g}$の拡張を構成できる

$$g_{\mu\nu} = e^a_\mu \, e^b_\nu \, \eta_{ab} \qquad \sqrt{g} = \det e^a_\mu$$

e_μ^{*a} : 多脚場の拡張

$$g_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2}\left(e_\mu^{*a} * e_\nu^{*b} + e_\nu^{*a} * e_\mu^{*b}\right)\eta_{ab}$$

e_μ^{*a}: vector場

要請1. $g_{\mu\nu}^*$: 2階のtensor場

$\lim_{\theta\to 0} e_\mu^{*a} = e_\mu^a$: 多脚場

要請2. $\lim_{\theta\to 0} g_{\mu\nu}^* = g_{\mu\nu} = e_\mu^a\, e_\nu^b\, \eta_{ab}$

$\sqrt{g}$ の拡張

$$e^* \coloneqq \det{}_* e_\mu^{*a} \coloneqq \frac{1}{D!} \varepsilon^{\mu_1 \cdots \mu_D} \varepsilon_{a_1 \cdots a_D} e_{\mu_1}^{*a_1} * \cdots * e_{\mu_D}^{*a_D}$$

e^*はscalar密度として変換する：

$$\delta_\xi^* e^* = \xi^\mu * \partial_\mu e^* + \left(\partial_\mu \xi^\mu\right) * e^*$$

可換極限では

$$\lim_{\theta \to 0} e^* = \det e_\mu^a = \sqrt{g}$$

共変微分の拡張 D^*_μ

$$D^*_\mu * V_\nu = \partial_\mu V_\nu - \Gamma^{*\alpha}_{\mu\nu} * V_\alpha$$

要請1：$D^*_\mu * V_\nu$がtensor場として変換

要請2：$D^*_\alpha * g^*_{\beta\gamma} = 0$ (平行移動の際にvectorの長さを変えない)

要請3： $\Gamma^{*\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{*\alpha}_{\nu\mu}$ (torsion free : 局所的に慣性系がとれる)

$$\Gamma^{*\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g^*_{\beta\gamma} + \partial_\beta g^*_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g^*_{\alpha\beta}\right) * g^{*\gamma\sigma}$$

ここで、 $g^{*\mu\nu}$ は計量 $g^*_{\mu\nu}$ の逆： $g^*_{\mu\nu} * g^{*\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$

曲率の拡張 ${R^*_{\mu\nu\rho}}^{\sigma}$

$$\left(D^*_\mu * D^*_\nu - D^*_\nu * D^*_\mu\right) * V_\rho = {R^*_{\mu\nu\rho}}^{\sigma} * V_\sigma$$

$$\Rightarrow \quad {R^*_{\mu\nu\rho}}^{\sigma} = \partial_\nu \Gamma^{*\sigma}_{\mu\rho} - \partial_\mu \Gamma^{*\sigma}_{\nu\rho} + \Gamma^{*\beta}_{\nu\rho} * \Gamma^{*\sigma}_{\mu\beta} - \Gamma^{*\beta}_{\mu\rho} * \Gamma^{*\sigma}_{\nu\beta}$$

さらに

Ricci曲率 $R^*_{\mu\nu} \coloneqq {R^*_{\mu\sigma\nu}}^{\sigma}$

Scalar曲率 $R^* \coloneqq g^{*\mu\nu} * R^*_{\mu\nu}$

変形されたdiffeo.の下で不変な作用

Scalar曲率 $\delta_\xi^* R^* = \xi^\mu * \partial_\mu R^*$

Scalar密度 $\delta_\xi^* e^* = \xi^\mu * \partial_\mu e^* + \left(\partial_\mu \xi^\mu\right) * e^*$

$$\Rightarrow \quad \delta_\xi^*(e^* * R^*) = \xi^\mu * \partial_\mu (e^* * R^*) + \left(\partial_\mu \xi^\mu\right) * (e^* * R^*)$$

$$= \partial_\mu (\xi^\mu * e^* * R^*)$$

$$\Rightarrow \quad S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2} \int d^D x \, (e^* * R^* + \mathrm{c.c.})$$

変形されたdiffeo.の下で不変なE-H作用の拡張

Expansion in θ in 4 dimension

多脚場の拡張 $e_{\mu}^{*a} := e_{\mu}^{a}$ 通常の多脚場

$$S_{\mathrm{EH}} = S_{\mathrm{EH}}^{(0)} + \frac{1}{2}\int d^D x\left(eR^{*(2)} + e^{*(2)}R\right) + O(\theta^3)$$

$$\begin{aligned}
e^{*(2)} = &-\frac{1}{8}\frac{1}{4!}\theta^{\alpha_1\beta_1}\theta^{\alpha_2\beta_2}\varepsilon^{\mu_1\ldots\mu_4}\varepsilon_{a_1\ldots a_4}\Big((\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}e_{\mu_1}{}^{a_1})(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}e_{\mu_2}{}^{a_2})e_{\mu_3}{}^{a_3}e_{\mu_4}{}^{a_4} \\
&+\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}(e_{\mu_1}{}^{a_1}e_{\mu_2}{}^{a_2})(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}e_{\mu_3}{}^{a_3})e_{\mu_4}{}^{a_4} + \partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}(e_{\mu_1}{}^{a_1}e_{\mu_2}{}^{a_2}e_{\mu_3}{}^{a_3})(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}e_{\mu_4}{}^{a_4})\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{*(1)} = &+\frac{i}{2}\theta^{\kappa\lambda}\Big((\partial_\kappa g^{\mu\nu})(\partial_\lambda R^{*(0)}_{\mu\nu}) - g^{\mu\nu}\Big((\partial_\kappa R^{*(0)\tau}_{\mu\alpha\nu})(\partial_\lambda g_{\tau\gamma})g^{\gamma\alpha} \\
&-(\partial_\kappa\Gamma^{*(0)\beta}_{\alpha\nu})(\Gamma^{*(0)\tau}_{\mu\beta}(\partial_\lambda g_{\tau\gamma})g^{\gamma\alpha} - \Gamma^{*(0)\alpha}_{\mu\tau}(\partial_\lambda g_{\beta\gamma})g^{\gamma\tau} + \partial_\mu((\partial_\lambda g_{\beta\gamma})g^{\gamma\alpha}) \\
&+(\partial_\lambda\Gamma^{*(0)\sigma}_{\mu\beta})) + (\partial_\kappa\Gamma^{*(0)\beta}_{\mu\nu})(\Gamma^{*(0)\tau}_{\alpha\beta}(\partial_\lambda g_{\tau\gamma})g^{\gamma\alpha} - \Gamma^{*(0)\alpha}_{\nu\tau}(\partial_\lambda g_{\beta\gamma})g^{\gamma\tau} \\
&+\partial_\alpha((\partial_\lambda g_{\beta\gamma})g^{\gamma\alpha}) + (\partial_\lambda\Gamma^{*(0)\alpha}_{\nu\beta}))\Big)\Big), \\
R^{*(2)} = &\; g^{*(2)\mu\nu}R^{*(0)}_{\nu\mu} + g^{\mu\nu}R^{*(2)}_{\nu\mu} + g^{*(1)\mu\nu}R^{*(1)}_{\nu\mu} \\
&+\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha g^{\mu\nu})(\partial_\beta R^{*(1)}_{\mu\nu}) - \frac{1}{8}\theta^{\alpha_1\beta_1}\theta^{\alpha_2\beta_2}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}g^{\mu\nu})(\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}R^{*(0)}_{\mu\nu}).
\end{aligned}$$

まとめ

可換空間

$$x^\mu \cdot x^\nu - x^\nu \cdot x^\mu = 0$$

$$\delta_\xi f = \xi^\mu \partial_\mu f$$

定数θ変形

非可換空間

$$x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu = i\theta^{\mu\nu}$$

$$\delta_\xi^* f = \xi^\mu * \partial_\mu f$$

- 非可換空間における微分幾何を構成
- 変形されたdiffeo.の下で不変な、E-H作用の拡張を求めた

$$S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{2}\int d^D x \,(e^* * R^* + \mathrm{c.c.})$$

コメント

- 変形パラメータ$\theta^{\mu\nu}$を手で入れている点や、計量や曲率の一般化が一意でない点など、自然でない点がある。

後の発展

- 拡張されたEinstein方程式

$$R^*_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^*_{\mu\nu} * R^* = 0$$

も構成され、Schwarzschild解の拡張解を求めたり、

宇宙論に応用されたりしている

[Shupp, Solodukhin][Aschieri, Castellani] [Schenkel]