Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function

Carl M. Bender, Dorje C. Brody and Markus P. Müller

Phys. Rev. Lett. 118, 130201 (2017), arXiv:1608.03679v4

筑波大学文献紹介　2019/5/10　松本高興

Introduction

昨年の秋に，指数定理などで知られている数学者Michael F. Atiyahが微細構造定数を導出する過程でRiemann予想を証明することができたと主張して，話題になった．

Atiyahは，公開された 5 ページの論文の中で，Todd関数と呼ぶ新しい関数を用いた背理法によってRiemann予想を証明しているが，詳細な根拠は公開されていないため，真偽は不明である．

この論文は，ある「Hamiltonian演算子」を構成することによってRiemann予想にアプローチしている．

Riemann zeta function

Riemannゼータ関数は，$z \in \mathbb{C}$に対して，$\mathrm{Re}(z) > 1$においては

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p:\,\mathrm{prime}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

によって定義される． 一方，$\mathrm{Re}(z) \leq 1$では，例えば関数等式

$$\pi^{-1}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \frac{\vartheta(\mathrm{i}x) - 1}{2} \left(x^{\frac{z}{2}} + x^{\frac{1-z}{2}}\right) + \frac{1}{z(z-1)}$$

を解析接続することによって定義される．

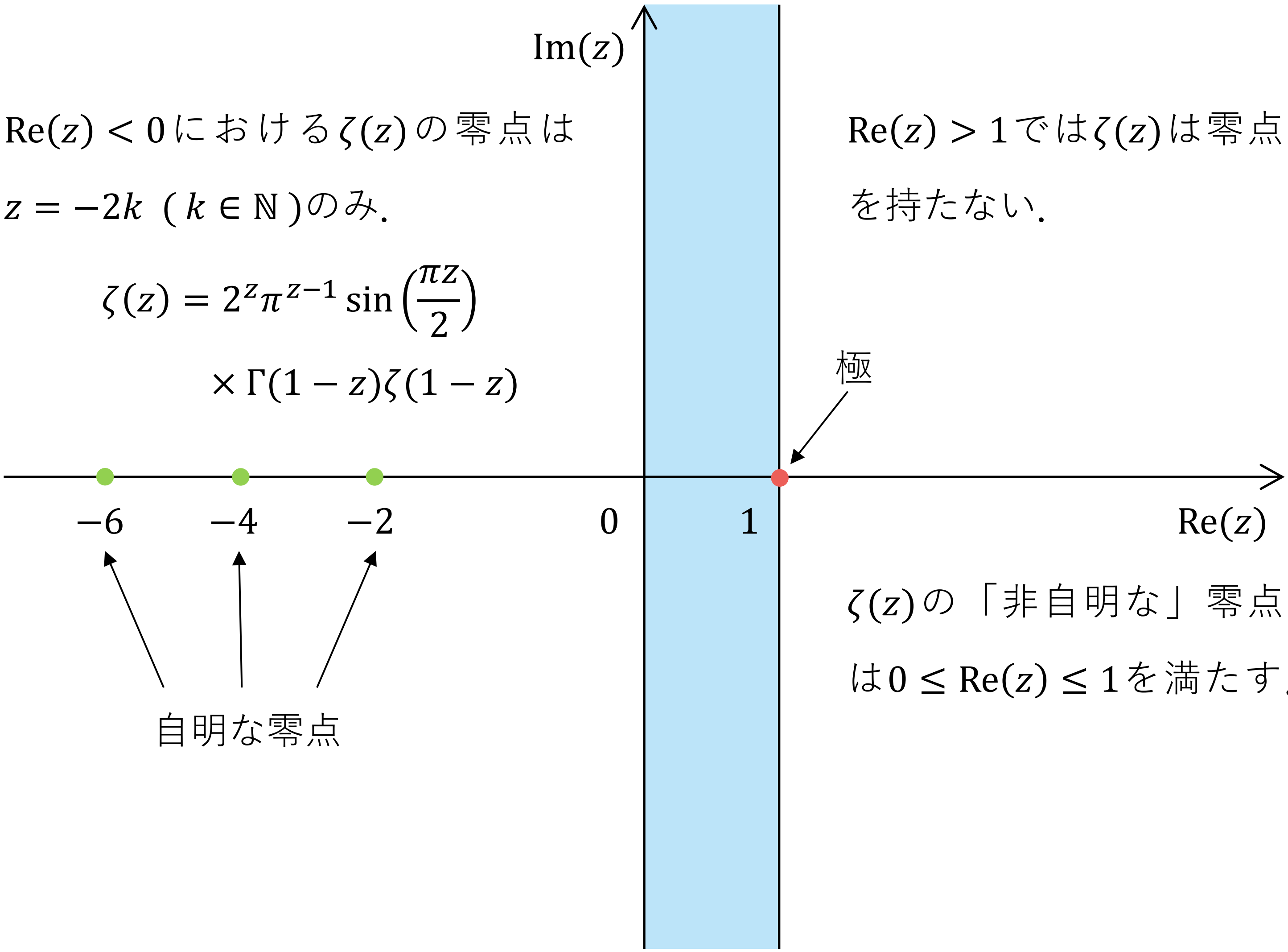
Trivial or non-trivial zeros

Re$(z) < 0$における$\zeta(z)$の零点は

$z = -2k \ \ (k \in \mathbb{N})$のみ.

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \times \Gamma(1-z)\zeta(1-z)$$

Re$(z) > 1$では$\zeta(z)$は零点を持たない.



$\zeta(z)$の「非自明な」零点は$0 \leq$ Re$(z) \leq 1$を満たす.

自明な零点

Riemann hypothesis

1859年，B. Riemannは自身の論文“与えられた数より小さい素数の個数について”の中で，次の予想をした.

「$\zeta(z)$の非自明な零点は$\mathrm{Re}(z) = 1/2$を満たす」

その40年後，1896年に，de la Vallée PoussinとJ. Hadamardが独立に次の結果を与えた.

「$\zeta(z)$ の非自明な零点は $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$を満たす」

しかし，それから120年経った現在まで（Riemann予想を支持する結果は数多く得られているものの）本質的な進展はほとんどない.

One approach

Hilbert–Pólya予想

「$\zeta(z)$の非自明な零点の虚部は
あるエルミート作用素$\hat{H}$の固有値に対応する」

- 合同ゼータ関数とFrobenius作用素 [Grothendieck, Deligne]
- Selbergゼータ関数とLaplace作用素 [Selberg]

Berry-Keating予想

「$\hat{H}$の古典的対応物は$H = xp$である」

- エネルギー準位数の準古典的な見積もり$\leftrightarrow$ 非自明な零点の平均数

Outline of this paper

この論文では，Hilbert–Pólya予想とBerry-Keating予想に（形式的に）同意する，次のHamiltonian演算子を提案している．

$$\hat{H} = \frac{1}{(1 - e^{-\mathrm{i}\hat{p}})}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})(1 - e^{-\mathrm{i}\hat{p}})$$

・$\hat{H}$ の固有関数 $\{\psi_n\}$ と固有値 $\{E_n\}$ に対して，境界条件 $\psi(0) = 0$ の下で，$\mathrm{z} = 1/2 + \mathrm{i}E_n$ は $\zeta(z)$ の非自明な零点である．

・$\hat{H}$ は通常の意味で「エルミートではない」が，$\mathrm{i}\hat{H}$ は $\mathcal{PT}$対称性を持ち，E_nが実数である可能性を提示している．

Inverse of $(1-e^{-\mathrm{i}\hat{p}})$

$\widehat{\Delta}=(1-e^{-\mathrm{i}\hat{p}})$ とおく．このとき $\hat{p}=-\mathrm{i}\partial_x$ より，

$$\widehat{\Delta}f(x)=f(x)-f(x-1)$$

したがって，周期 1 の関数は $\widehat{\Delta}$ によって消されるため，全ての滑らかな関数の空間では $\widehat{\Delta}$ は逆を持たない．そこで，$x\to\infty$ で消える関数に制限する．

このとき，$\widehat{\Delta}^{-1}$ は

Bernoulli数

$$\widehat{\Delta}^{-1}f(x)=\frac{1}{\mathrm{i}\hat{p}}\frac{-\mathrm{i}\hat{p}}{e^{-\mathrm{i}\hat{p}}-1}f(x)=\frac{1}{\mathrm{i}\hat{p}}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{(-\mathrm{i}\hat{p})^n}{n!}f(x)$$

Eigenvalue equation for $\hat{H}$

固有値方程式 $\hat{H}\psi(x) = E\psi(x)$ の両辺に左から $\hat{\Delta}$ をかければ,

$$(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\,\hat{\Delta}\psi(x) = E\,\hat{\Delta}\psi(x)$$

これは一階の線形微分方程式であり，すぐに解くことができて,

$$E = \mathrm{i}(2\mathrm{z} - 1), \qquad (z \in \mathbb{C})$$

$$\hat{\Delta}\psi(x) = x^{-z}$$

後は， $\hat{\Delta}^{-1}x^{-z}$ を評価すれば良いだけである.

Evaluation of $\hat{\Delta}^{-1}x^{-z}$

$$\hat{\Delta}^{-1}x^{-z} = \frac{1}{\mathrm{i}\hat{p}}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-\mathrm{i}\hat{p})^n}{n!}(\mathrm{i}\hat{p})\frac{x^{1-z}}{1-z}$$

$(\mathrm{i}\hat{p})^n$の作用

$$= \frac{\Gamma(2-z)}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-1)^n}{n!}\frac{x^{1-z-n}}{\Gamma(2-z-n)}$$

Γ関数の積分表示

$$= \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi\mathrm{i}} x^{1-z}\int_C du e^u u^{z-2}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(-u/x)^n}{n!}$$

B_nの定義

$$= \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi\mathrm{i}} x^{1-z}\int_C du \frac{e^u u^{z-2}}{1-e^{-u/x}}$$

$u/x = t$

$$= \frac{\Gamma(1-z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_C dt \frac{e^{xt}t^{z-1}}{1-e^{-t}}$$

Hurwitzゼータ

関数の定義

$$= -\zeta(z, x+1)$$

Boundary condition for $\psi_z(x)$

得られた固有関数 $\psi_z(x) = -\zeta(z, x+1)$ に境界条件 $\psi_z(0) = 0$ を課せば，$\zeta(z,1) = \zeta(z)$ より，

$$\psi_z(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \zeta(z) = 0$$

さらに， 極限 $x \to \infty$ の下で，

$$\psi_z(x) \sim \begin{cases} x^{2k+1}, & \text{自明な零点（}z = -2k\text{）} \\ \dfrac{x^{1-z}}{1-z}, & \text{非自明な零点（}0 < \mathrm{Re}(z) < 1\text{）} \end{cases}$$

したがって， z が $\zeta(z)$ の非自明な零点である場合，かつそのときに限り， $\psi_z(x)$ は境界条件を満たし，$\hat{\Delta}\psi_z(x)$ は $x \to \infty$で消える．

Eigenvalues and Eigenfunctions of $\widehat{H}$

$\widehat{H}$ の固有値と固有関数：

$$E_n = \mathrm{i}(2z_n - 1), \qquad z_n \text{ は } \zeta(z) \text{ の非自明な零点}$$

$$\psi_n(x) = -\zeta(z_n, x+1)$$

これは $\zeta(z)$ の非自明な零点が $z_n = (1 - iE_n)/2$ の形であることを意味している.

特に，固有値 E_n がすべて実であるとき，かつそのときに限りRiemann予想は成り立つ．E_n は実になり得るか？ → $\mathcal{PT}$対称性

$\mathcal{PT}$ symmetry of $\mathrm{i}\widehat{H}$

従来の$\mathcal{PT}$変換は $(\hat{x}, \hat{p}) \to (-\hat{x}, \hat{p})$ および $\mathrm{i} \to -\mathrm{i}$ である．しかし，この論文では $\hat{x}$ と $\hat{p}$ の役割を入れ替えた$\mathcal{PT}$変換を考える．

$$(\hat{x}, \hat{p}) \to (\hat{x}, -\hat{p}) \text{ および } \mathrm{i} \to -\mathrm{i}$$

このとき，

$$\mathrm{i}\widehat{H} = \mathrm{i}\frac{1}{(1-e^{-\mathrm{i}\hat{p}})}(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})(1-e^{-\mathrm{i}\hat{p}})$$

は$\mathcal{PT}$対称性を持つ，つまり $\left[\, \mathrm{i}\widehat{H},\ \mathcal{PT} \,\right] = 0$である．

Broken and unbroken $\mathcal{PT}$ symmetry

固有値方程式 $\mathrm{i}\hat{H}\psi_n = \mathrm{i}E_n\psi_n$ に左から$\mathcal{PT}$変換を作用させれば,

$$\mathrm{i}\hat{H}(\mathcal{PT}\psi_n) = -\mathrm{i}\bar{E}_n\,(\mathcal{PT}\psi_n)$$

したがって,

ψ_n が$\mathcal{PT}$の固有状態である（$\mathcal{PT}$対称性が破れていない）

$\Leftrightarrow$ E_n は純虚数

ψ_n が$\mathcal{PT}$の固有状態ではない（$\mathcal{PT}$対称性が破れている）

$\Leftrightarrow$ E_n は純虚数ではなく，$\bar{E}_n = -E_m$ となるmが存在する.

Possibility of the reality of E_n

今の場合，$E_n = \mathrm{i}(2z_n - 1)$ より，

$$\hat{H}(\mathcal{PT}\psi_n) = \mathrm{i}(2\bar{z}_n - 1)(\mathcal{PT}\psi_n)$$

ここで，関係式 $\zeta(\bar{z}) = \overline{\zeta(z)}$より，

$$z \text{ が非自明な零点である} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} \text{ が非自明な零点である}$$

したがって，すべてのz_nに対して，

$$\mathcal{PT}\psi_n = \psi_{\bar{n}} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{対称性がすべて破れている}$$

つまり，少なくとも E_n は純虚数ではない．

Discussion

この論文では，E_n が実数であることは示していない．特に，$\hat{H}$ の定義域が明らかになっていない．

定義域が明らかになり，その空間で適切な内積を定義することによって $\hat{H}$ の自己共役性を確立すれば，E_n が実数であること，したがって，Riemann予想の証明につながるかもしれない．

Argument about this paper

この論文がPhysical Review Lettersから出版された10日後，J. BellissardがarXivに

Comment on “Hamiltonian for the
Zeros of the Riemann Zeta Function”, arXiv: 1704.02644

を投稿し，いくつかの疑問とともに懐疑的な姿勢を示した．しかし，その一ヶ月後，この論文の著者らが

Comment on ‘Comment on “Hamiltonian for the
Zeros of the Riemann Zeta Function”’, arXiv: 1705:06767

を投稿し，Bellissardの疑問はすべて議論済みであり，結論に影響は与えない，という回答を与えている．

Conclusion

4 年間，本当に

お世話になりました。

アイルランドに行っても

元気に頑張ります！！