

On the need for soft dressing

Daniel Carney, Laurent Chaurette, Dominik Neuenfeld, Gordon Semenoff

JHEP 09 (2018) 121

arXiv: 1803.02370 [hep-th]

2018/11/30 文献紹介

栗田 竣介

Background

- Asymptotic な領域の性質(Asymptotic Symmetry)からIR発散を見ることが出来る
- 全photon寄与の足し合わせ(Inclusive formalismと呼ぶ)による計算手法のみならず、Asymptotic SymmetryとかかわるDressed formalismという手法もある
- Inclusive formalismと Dressed formalism の2手法について、どのような違いがあるかは興味深い

1. Asymptotic Symmetry をOEDで紹介する
2. Asymptotic Symmetry から IRのアプローチ
3. 重ね合わせを使った散乱においてformalismによる違いを明示する

Contents

1. Asymptotic Symmetry
 1. Setup
 2. Matching condition
 3. Infinite Charge Conservations
 4. Large Gauge Symmetry
 5. IR divergences
2. IR divergence in superposition state
 1. Inclusive formalism
 2. Dressed formalism
3. Conclusion

Setup - Condition

Minkowski 空間のQED($1/r$ のleading termのみ)

$$ds^2 = -dt^2 + d\mathbf{x}^2$$

Massless 点粒子(charge: Q_k , 規格化4速度: $v = \gamma_k(1, \vec{\beta}_k)$)

電磁場は Lienard-Wiechert 解

$\hat{\mathbf{x}}$ 方向単位ベクトル

$$F_{rt}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k \left(r - t \hat{\mathbf{x}} \cdot \vec{\beta}_k \right)}{\left| \gamma_k^2 \left(t - r \hat{\mathbf{x}} \cdot \vec{\beta}_k \right)^2 - t^2 + r^2 \right|^{3/2}}$$

Asymptoticな領域(空間的無限遠、時間的無限遠)特有の性質を調べる

Setup - Penrose Diagram

SpacetimeのInfinityを
有限範囲で議論できる

$$u = t - r, \quad v = t + r$$

$i^0 : (r, t) = (\infty, a)$ 空間的無限遠

$i^- : (a, -\infty)$ 時間的過去

$i^+ : (a, \infty)$ 時間的未来

$\mathcal{I}^+ : r \rightarrow \infty, u : \text{fixed}$ Out-state

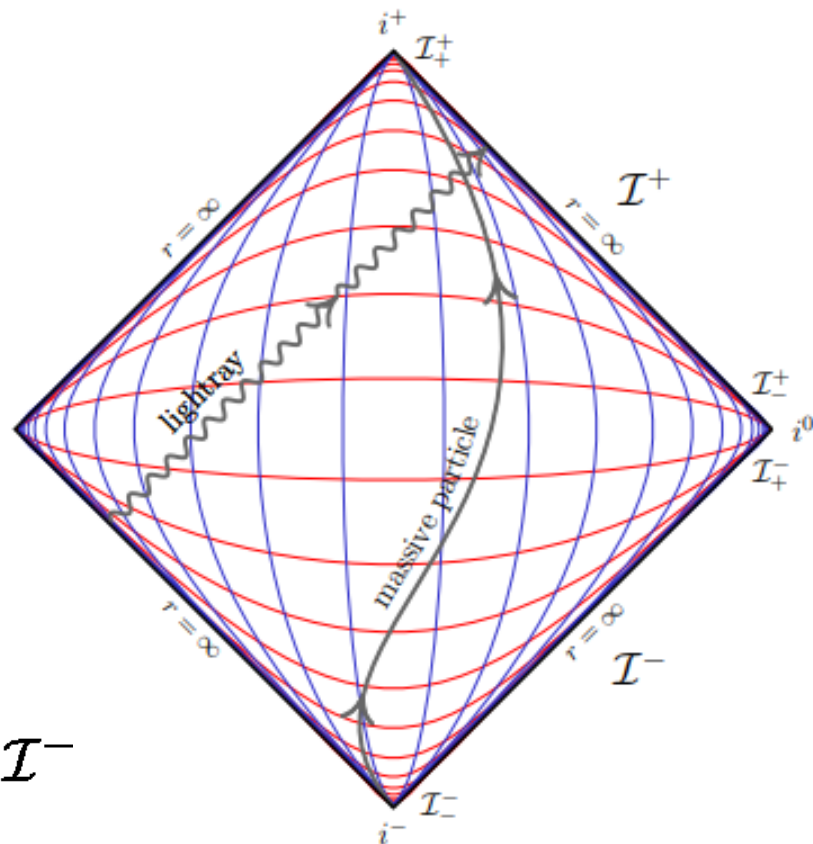
$\mathcal{I}^- : r \rightarrow \infty, v : \text{fixed}$ In-state

$\mathcal{I}_-^+ : u \rightarrow -\infty \text{ on } \mathcal{I}^+ \quad \mathcal{I}_+^- : v \rightarrow \infty \text{ on } \mathcal{I}^-$

Diagram各点で S^2 として空間自由性が残る

$\mathcal{I}^+$ 上での計量: $(r, u, \underbrace{z, \bar{z}}_{S^2})$

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + \frac{4r^2}{(1 + z\bar{z})^2} dzd\bar{z}$$



Matching condition

Lienard-Wiechert解 から Asymptotic領域 $\mathcal{I}^+$, $\mathcal{I}^-$ における性質をつかむ

$$F_{rt}(\mathbf{x}, t) = \frac{e}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k \left(r - t \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k \right)}{\left| \gamma_k^2 \left(t - r \hat{x} \cdot \vec{\beta}_k \right)^2 - t^2 + r^2 \right|^{3/2}}$$

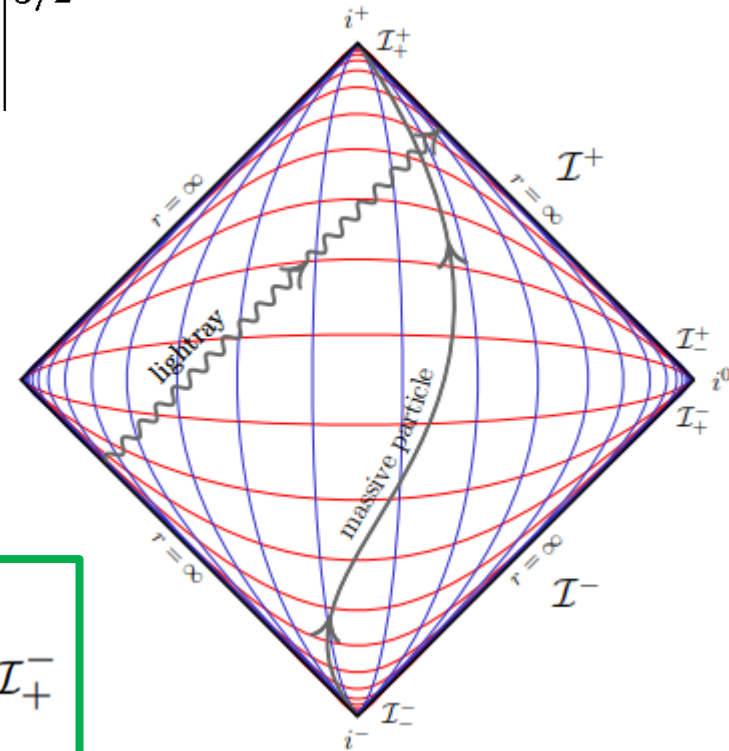
$\mathcal{I}_-^+$, $\mathcal{I}_+^-$ での値は

Antipodal 変換: $\hat{x} \rightarrow -\hat{x}$ とすると一致

Asymptoticな領域 特有の性質として

Matching condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{ru}(\hat{x})|_{\mathcal{I}_-^+} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{rv}(-\hat{x})|_{\mathcal{I}_+^-}$$



Infinite Charge Conservations

境界条件: $\varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = \varepsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-}$ を課して

Asymptotic Charge: $\overbrace{1/r \text{ 展開の2次の項}}^{(2)}$

$$Q_\varepsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_-^+} d^2 z \gamma_{z\bar{z}} \varepsilon F_{ru}^{(2)}, \quad Q_\varepsilon^- = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^-} d^2 z \gamma_{z\bar{z}} \varepsilon F_{rv}^{(2)}$$

S^2 metric

$F_{ru}^{(2)}, F_{rv}^{(2)}$ の Matching condition より

無限個の Charge 保存則

$$Q_\varepsilon^+ = Q_\varepsilon^-$$

ε : 定数



$$\sum_{k=1}^m Q_k^{in} = \sum_{k=1}^n Q_k^{out}$$

Incoming 電荷 = Outgoing 電荷

Large Gauge Symmetry

Maxwell Eq.を使って Q_ε^+ を書き直す

$$Q_\varepsilon^+ = \underbrace{-\frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} dudz^2 \left(\partial_z \varepsilon F_{u\bar{z}}^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \varepsilon F_{uz}^{(0)} \right)}_{\text{Soft photon 項}} + \underbrace{\int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \varepsilon \gamma_{z\bar{z}} j_u^{(2)}}_{\text{Matter current 項}}$$

$\frac{1}{r}$ 展開の0次の項
 $F_{u\bar{z}}^{(0)}$

無限小変換

シンプレクティック形式を使って正準量子化

Matter current 項: U(1) matter symmetry

$$[Q_\varepsilon^+, \Phi_k(u, z, \bar{z})] = -Q_k \varepsilon(z, \bar{z}) \Phi_k(u, z, \bar{z}) \equiv i\delta_\varepsilon \Phi_k(u, z, \bar{z})$$

Φ_k : Charge Q_k を持つmatter場

Soft photon 項:

$$[Q_\varepsilon^+, A_z^{(0)}(u, z, \bar{z})] = i\partial_z \varepsilon(z, \bar{z})$$

ε をパラメタとしたU(1)ゲージ対称性は
Asymptotic 領域でも存在

IR divergences

Asymptotic SymmetryとIR発散の関係をBhaBha散乱で見る

放射モードが無い場合

Maxwell Eq. より放射項を除いて on $\mathcal{I}^+$

$$\partial_u F_{ru}^{(2)} = -e^2 j_u^{(2)}$$

$(u_0, z_0, \bar{z}_0)$ の点に存在するOutgoing fluxを使うと

$$F_{ru}^{(2)} = -e^2 \gamma^{z\bar{z}} \delta^2(z - z_0) \theta(u - u_0)$$

電磁場は散乱後の S^2 座標に依り、

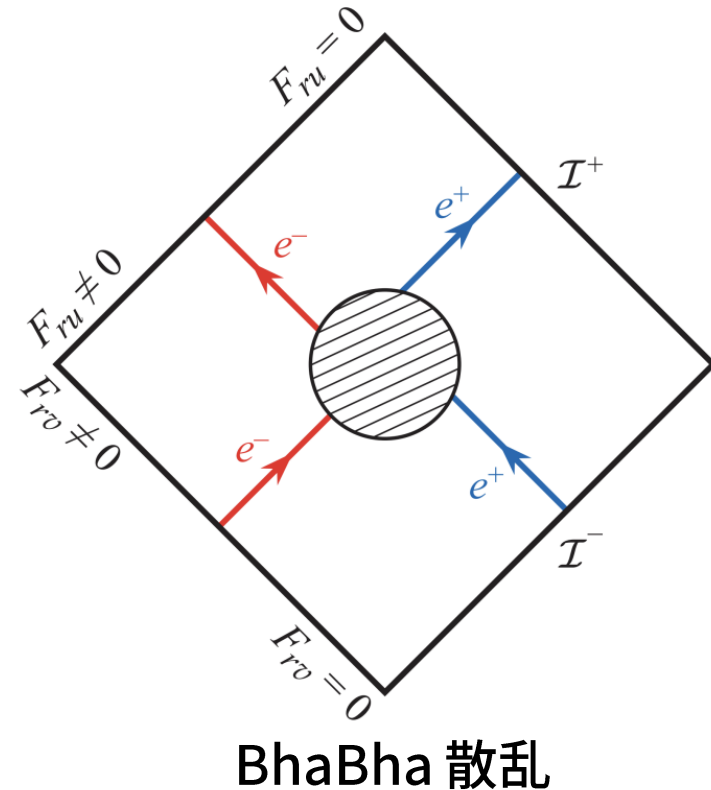
matching condition

$$F_{ru}^{(2)}(z, \bar{z}) \Big|_{\mathcal{I}_-^+} = F_{rv}^{(2)}(z, \bar{z}) \Big|_{\mathcal{I}_+^-}$$

を満たさない



(電荷含む) Asymptotic Chargeが非保存
散乱振幅 : 0



Faddeev-Kulish の構成法

Dressed state:

$$|\alpha\rangle \equiv \exp \left(e \sum_l \int_\lambda^E \frac{d^2 \mathbf{k}}{\sqrt{2k}} \left[\sum_{\mathbf{p} \in \alpha} \frac{\varepsilon_l \cdot \mathbf{p}}{k \cdot \mathbf{p}} \phi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) a_{\mathbf{k}}^{l\dagger} - h.c. \right] \right) |\alpha\rangle$$

$\mathbf{k} \rightarrow 0$ で1の関数

Diagramの全オーダーで計算して

Dressed stateで定義した S matrixはIR limitで有限

IR 有限なS matrixを構成出来る状態空間を作る

QED potential: $V = -e \int d^3 \mathbf{x} N(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) A_\mu$

Asymptotic 状態空間: $|t| \rightarrow \infty$ における寄与から

$$\exp \left(\cdots \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} d^3 \mathbf{p} \frac{p^\mu}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}} \left(a_\mu^\dagger(\mathbf{k}) e^{i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{p_0} t} - h.c. \right) \right) \mathcal{H}_{\text{Fock}} = \mathcal{H}_{\text{AS}}$$

はtに依っている

同じ空間をtに依らない演算子で定義し、
Dressed stateを得た

IR divergences – Dressed(FK)

放射モードあり(Dressed stateから解を構成)

$$F_{ru}^{(2)} = F_{rv}^{(2)} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Matching conditionは満たされる}$$

IR limitで 0でない散乱振幅が得られる

Dressed Stateを使って状態を構成する

Dressed state:

$$|j_0\rangle_{\text{dressed}} = \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int \frac{d^2 z}{z_0 - z} \overbrace{A_{\bar{z}}^{(0)}(u_0, z, \bar{z})}^{\text{Maxwell Eq. のShockwave解}} - h.c. \right) |j_0\rangle$$

Dressed stateは Q_ϵ^+ の固有状態でもあり、Asymptotic Symmetryに関係している

Matching conditionを満たしていれば、
Dressed Stateを使って0でない散乱振幅を得られる

Superposition (本論文の内容)

- Dressed formalismの特徴として、計算が簡便であることがあったが、干渉性の問題を解決できる
- Formalismによって散乱断面積の干渉性が異なる、重ね合わせを使った散乱を試みる

ラベル: α_i, β, β' : (in, out) hard particles, b : soft photons

Incoming 状態: $|\text{in}\rangle \equiv \sum_{i=1}^N f_i |\alpha_i\rangle$

密度行列:
$$\rho = \sum_{b,b'} \sum_{i,j}^N \int d\beta \int d\beta' f_i f_j^* S_{\beta b, \alpha_i} S_{\beta' b', \alpha_j} |\beta', b'\rangle \langle \beta, b|$$

密度行列のIR極限での値を計算

Inclusive formalism

- 観測できない soft photonsについて足し上げ
- 仮想/放射 photonの寄与

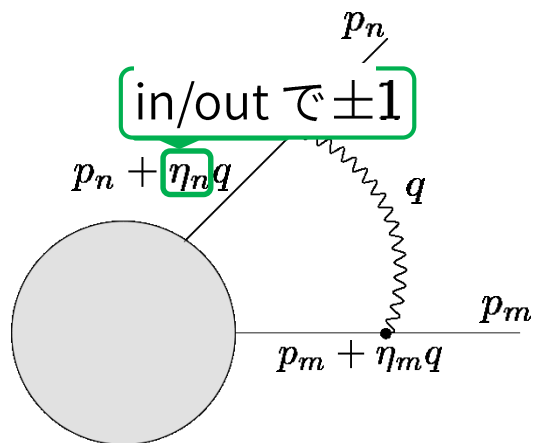
Dressed formalism

- 無限個のsoft photonを含む、IR有限なS matrixを作るような状態空間

Inclusive formalism(1)

λ : IR cutoff, Λ : UV cutoff, IR極限: $\lambda \rightarrow 0$

仮想 photon による寄与



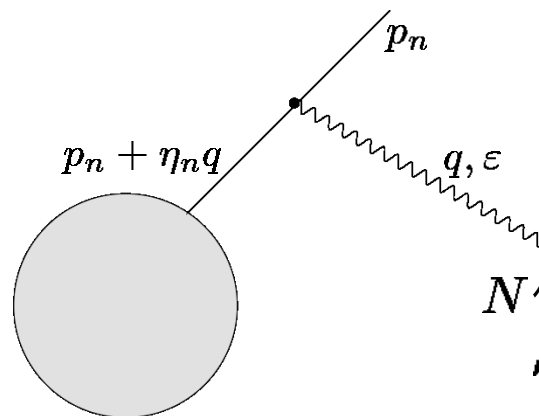
$A(q)$: 1 photonが
外線同士で飛ん
でいる時の寄与

$$S_{\beta\alpha} = S_{\beta\alpha}^{\Lambda} \exp \left(\frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\Lambda} d^4 q A(q) \right) = S_{\beta\alpha}^{\Lambda} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^{A_{\beta,\alpha}/2}$$

$$A_{\beta,\alpha} \equiv \frac{1}{16\pi^3} \sum_{n,m \in \alpha,\beta} \int d^2 \Omega \frac{e_n e_m (p_n \cdot p_m) \eta_n \eta_m}{(E_n - \mathbf{p}_n \cdot \hat{q})(E_m - \mathbf{p}_m \cdot \hat{q})}$$

$$\tilde{A}_{\beta\beta',\alpha_i\alpha_j} \equiv \frac{1}{16\pi^3} \sum_{\substack{n \in \alpha_i,\beta \\ m \in \alpha_j\beta'}} \dots$$

放射 photon による寄与



N 個の放射 photon
 S matrix の寄与

$$S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_N) = S_{\beta\alpha} \prod_{r=1}^N (2\pi)^{-\frac{3}{2}} (2q_r)^{-\frac{1}{2}} \sum_n \frac{e_n \eta_n (p_n \cdot \varepsilon^*)}{p_n \cdot q_r}$$

Photonの数とエネルギーで足しあげ

$$\sum_b S_{\beta b, \alpha_i} S'_{\beta' b, \alpha_j} (\leq \tilde{E}) = S_{\beta b, \alpha_i} S_{\beta' b, \alpha_j}^* \left(\frac{E}{\lambda} \right)^{\tilde{A}_{\beta\beta',\alpha_i\alpha_j}} \dots$$

$$\rho_{\beta\beta'} = S_{\beta\alpha_i}^{\Lambda} S_{\beta'\alpha_j}^{\Lambda*} \lambda^{\frac{1}{2} A_{\beta,\alpha_i} + \frac{1}{2} A_{\beta',\alpha_j} - \tilde{A}_{\beta\beta',\alpha_i\alpha_j}} \times \dots$$

IRの振る舞い

Inclusive formalism(2)

IR 極限($\lambda \rightarrow 0$)で有限な寄与は

$$\frac{1}{2}A_{\beta,\alpha_i} + \frac{1}{2}A_{\beta',\alpha_j} - \tilde{A}_{\beta\beta',\alpha_i\alpha_j} = 0$$

でのみ得られ、 $\alpha_i = \alpha_j$ となる

$$\sigma_{\text{in} \rightarrow \beta} = \sum_i^N |f_i|^2 |S_{\beta\alpha_i}^\Lambda|^2 \times \cdots \alpha_i \alpha_i$$



Incoming stateの間で干渉が発生しない
(物理的にはIn state間でも干渉が発生しているのが自然)

Dressed formalism

dressed state:

$$||\alpha\rangle\rangle \equiv \exp \left(e \sum_l \int_\lambda^E \frac{d^2\mathbf{k}}{\sqrt{2k}} \left[\sum_{\mathbf{p} \in \alpha} \frac{\varepsilon_l \cdot \mathbf{p}}{k \cdot \mathbf{p}} \overbrace{\phi(\mathbf{k}, \mathbf{p})}^{\mathbf{k} \rightarrow 0 \text{ で } 1 \text{ の関数}} a_{\mathbf{k}}^{l\dagger} - h.c. \right] \right) |\alpha\rangle$$

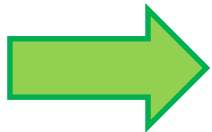
IR 有限な密度行列:

$$\rho = \sum_{i,j} \int \int d\beta d\beta' f_i f_j^* \underline{\mathbf{S}_{\beta\alpha_i}} \underline{\mathbf{S}_{\beta'\alpha_j}^*} ||\beta\rangle\rangle \langle\langle\beta'|$$

Dressed S matrix 要素

Inclusiveとの比較のため、観測できないsoft photonsについて足し上げて

$$\sigma_{\text{in} \rightarrow \beta} = \sum_{i,j} f_i f_j^* \mathbf{S}_{\beta\alpha_i} \mathbf{S}_{\beta\alpha_j}^*$$



Incoming state間で干渉が発生する

Conclusions

一般論

- Asymptoticな領域にゲージ対称性を拡張
- 散乱振幅とMatching conditionの関係
 - Dressed formalism が計算上便利

本論文

- IR極限において、Dressed formalismが物理に即した(干渉有の)散乱断面積を得た
 - IRの計算として、Dressed formalismがより適するという示唆
 - 他にも計算例、Dressingの方法はあるか？