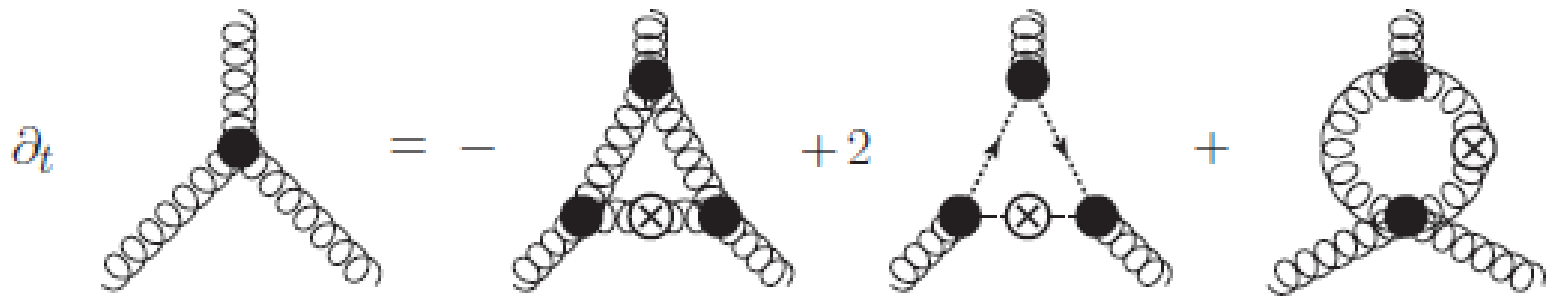


Non-perturbative finite temperature Yang-Mills theory

文献紹介 2018/07/06



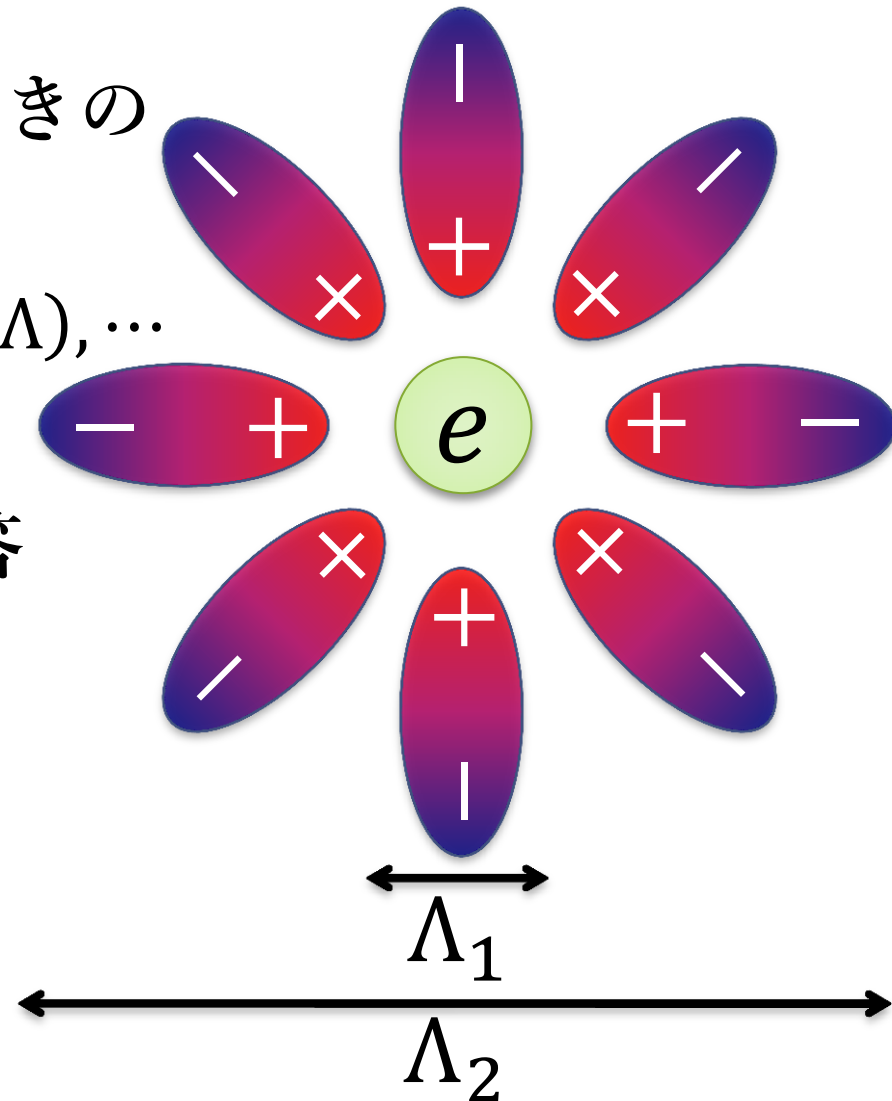
C. Wetterich, Phys. Lett. B 301, 90 (1992).

J. P. Blaizot, R. Mendez-Galain, N. Wschebor,
Phys. Lett. B 632, 571 (2006).

A. K. Cyrol, M. Mitter, J. M. Pawłowski,
N. Strodthoff, Phys. Rev. D 97, 054015 (2018).

繰り込み群 (～1950)

- 繰り込み
 - スケールを変えたときの粒子描像の変化
 - パラメータ $m(\Lambda), g(\Lambda), \dots$
- 繰り込み群
 - $\Lambda \rightarrow \Lambda + \delta\Lambda$ への応答
 - Ovsiannikov
 - Gell-Mann-Low
 - Callan-Symanzik
 - Weinberg-'t Hooft

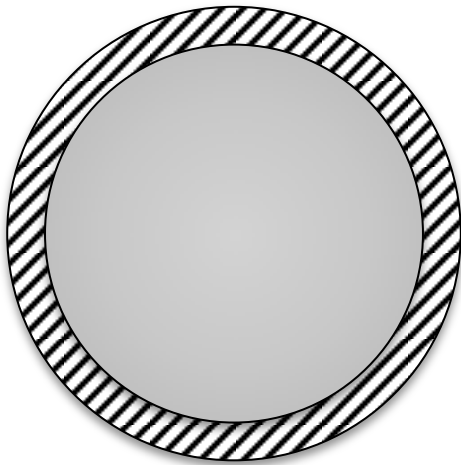


繰り込み群 (1970~)

- Wilson流の繰り込み群

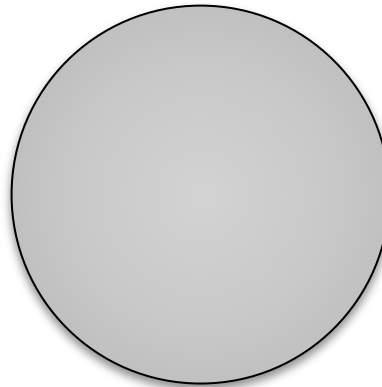
スケール Λ_0 で
繰り込まれた理論

$$S_{\Lambda_0}[\phi]$$



$$\int_0^\Lambda (\dots) + \int_\Lambda^{\Lambda_0} (\dots)$$

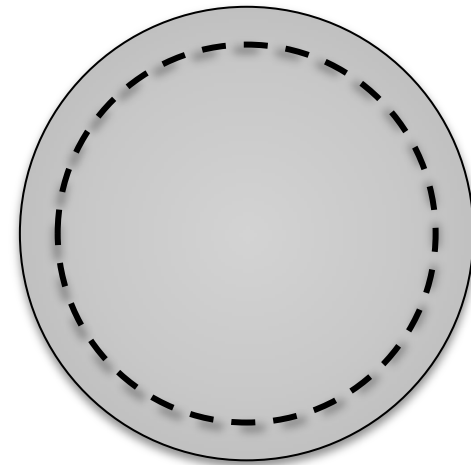
粗視化
と
スケール変換



$$\int_0^\Lambda (\dots)$$

低エネルギー
有効理論

$$S_{eff,\Lambda}[\phi]$$



$$\int_0^{\Lambda_0} (\dots)$$

Wilsonの見方

- 古典的な繰り込み群
 - パラメータの変化を追う ($m(\Lambda), g(\Lambda)$)
 - 摂動計算を行う必要がある
- Wilson流の繰り込み群
 - 作用の変化を追う ($S_{eff,\Lambda}[\phi]$)
 - (原理的には)非摂動的な取り扱いが可能
- Wilson流の繰り込み群方程式
 - $S_{eff,\Lambda}[\phi]$ が従う方程式
 - Wegner-Houghton eq.
 - Polchinski eq.
 - Wetterich eq.

Wilson有効作用

- スケール Λ での作用を作る

$$Z_\Lambda[J] = e^{W_\Lambda[J]} = \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S_{\Lambda_0} - \Delta S_\Lambda + J \cdot \phi}$$

$$\Delta S_\Lambda[\phi] = \frac{1}{2} \int_p \phi(-p) R_\Lambda(p^2) \phi(p)$$

- R_Λ が満たすべき性質

- IRをケアすべし

$$\lim_{p^2/\Lambda^2 \rightarrow 0} R_\Lambda(p^2) > 0$$

- $\Lambda \rightarrow \infty$ で classical action になるべし

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0 \rightarrow \infty} R_\Lambda(p^2) = \infty$$

- $\Lambda \rightarrow 0$ で effective action になるべし

$$\lim_{\Lambda^2/p^2 \rightarrow 0} R_\Lambda(p^2) = 0$$

Wetterich 方程式

- (Legendre) effective action を作る

$$\Gamma_{\Lambda}[\Phi] = \sup_J \left\{ \int \Phi \cdot J - W_{\Lambda}[J] \right\} - \Delta S_{\Lambda}[\Phi]$$

- その flow を考える

$$\frac{d}{d\Lambda} \Gamma_{\Lambda}[\Phi] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)}[\Phi] + R_{\Lambda} \right]^{-1} \frac{dR_{\Lambda}}{d\Lambda} \right\}$$

- やりたいこと

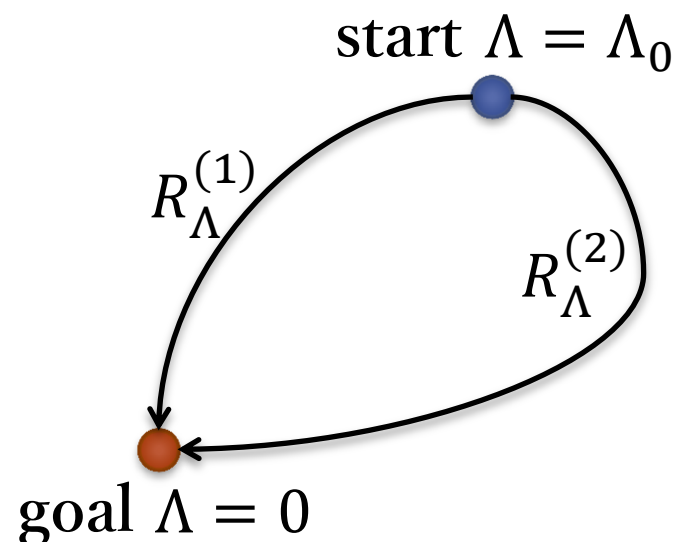
UVスケール Λ_0 で
定義された作用 S_{Λ_0}



Wetterich eq.

$$\Lambda : \Lambda_0 \rightarrow 0$$

Effective action Γ



R_Λ の選び方(スキーム)

- 重要な場所は端

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_0 \rightarrow \infty} \Gamma_\Lambda[\Phi] = S[\phi], \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \Gamma_\Lambda[\Phi] = \Gamma[\phi]$$

- よく使われる関数形

- sharp

$$p^2 \left(\frac{1}{\theta(\Lambda^2 - p^2)} - 1 \right)$$

- exponential (数値計算)

$$\frac{p^2}{e^{p^2/\Lambda^2} - 1}$$

- optimaized (解析計算)

$$(\Lambda^2 - p^2)\theta(1 - p^2/\Lambda^2)$$

Vertex expansion

- Wetterich eq. には近似が必要！
 - n 点の vertex function で書き直してみる

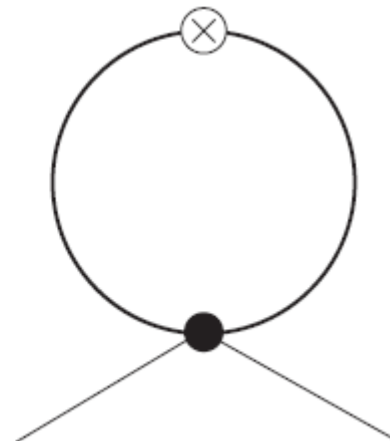
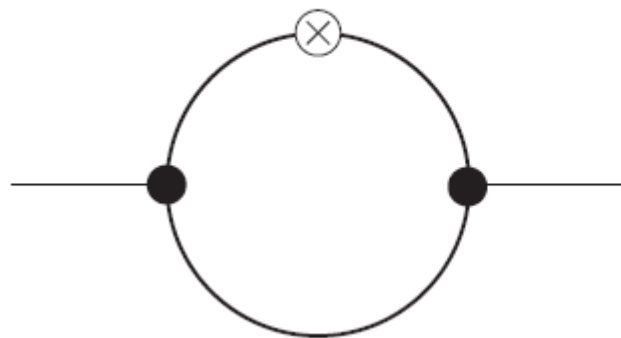
$$\begin{aligned} \Gamma_{\Lambda}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &= \int_{x_1 \dots x_n} e^{ip \cdot x} \frac{\delta^n \Gamma_{\Lambda}}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\Lambda} \Gamma_{\Lambda} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \frac{d}{d\Lambda} R_{\Lambda} \right\} \\ \frac{d}{d\Lambda} \Gamma_{\Lambda}^{(2)} &= \int \frac{dR_{\Lambda}}{d\Lambda} \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \Gamma_{\Lambda}^{(3)} \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \Gamma_{\Lambda}^{(3)} \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dR_{\Lambda}}{d\Lambda} \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \Gamma_{\Lambda}^{(4)} \left[\Gamma_{\Lambda}^{(2)} + R_{\Lambda} \right]^{-1} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Vertex expansion

- Wetterich eq. には近似が必要！

$$\int \frac{dR_\Lambda}{d\Lambda} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(3)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(3)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1}$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{dR_\Lambda}{d\Lambda} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(4)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1}$$



- 展開を有限次で打ち切る
- $\Gamma_\Lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1} - q, p_n + q) \sim \Gamma_\Lambda^{(n)}(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n)$

Derivative expansion

- 微分演算子で展開

$$\Gamma_{\Lambda}[\Phi] = \int d^d x \left\{ V_{\Lambda} + \frac{1}{2} Z_{\Lambda} (\partial_{\mu} \phi)^2 + \frac{1}{6} Y_{\Lambda} (\partial^2 \phi)^2 + \dots \right\}$$
$$\sim \int d^d x \left\{ V_{\Lambda} + \frac{1}{2} Z_{\Lambda} (\partial_{\mu} \phi)^2 \right\}$$

Local potential approximation

$$\Gamma_{\Lambda}[\Phi] \sim \int d^d x \left\{ V_{\Lambda} + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi)^2 \right\}, \quad Z_{\Lambda} \sim 1$$

$$\Leftrightarrow \phi(p) \sim (2\pi)^d \delta^{(d)}(p) \phi, \quad \phi = (\text{const.})$$

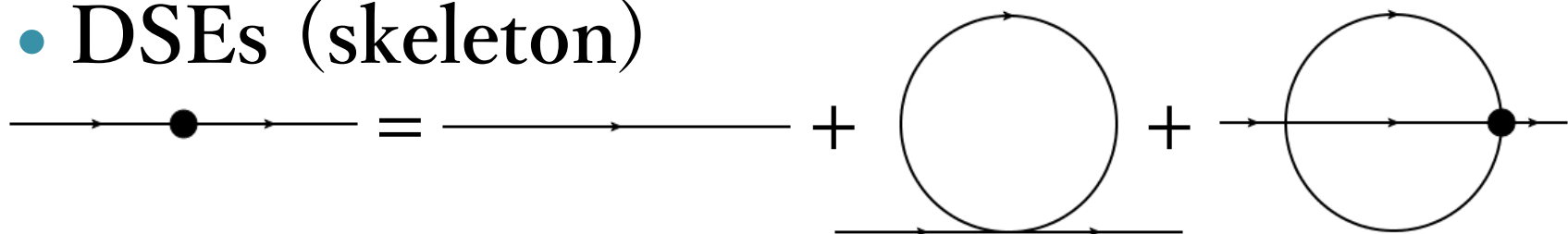
- 真空の構造を調べる場合などに有効

Dyson-Schwinger との比較

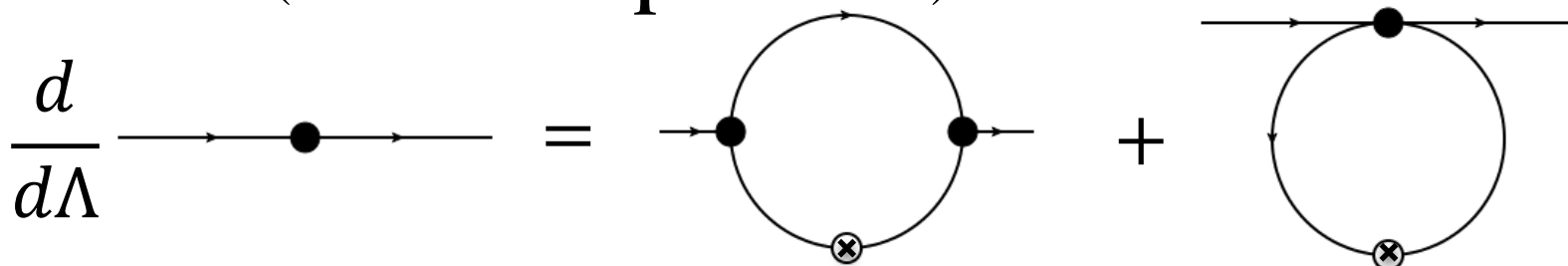
- master eq.

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \frac{\delta}{\delta\phi} e^{-S[\phi] + \int J \cdot \phi}$$

- DSEs (skeleton)



- FRG (vertex expansion)



- DSEs では bare な vertex が現れる
- self-consistent eqs.
- 近似の改良のしやすさ

$O(N) \phi^4$ 理論の解析

- $N \rightarrow \infty$ で解ける模型

$$S = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{r}{2} \phi^2 + \frac{u}{4!} (\phi^2)^2$$

- M. D'Attanasio and T. R. Morris, Phys. Lett. B409 (1997) 363–370.

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \hat{\Gamma}_\Lambda[\rho], \quad \rho = \frac{1}{2} \phi_i \phi_i$$

- 2点関数を求めてみる $\hat{\Gamma}_\Lambda^{(2)}[\rho]$

$$\frac{d}{d\Lambda} \Gamma_\Lambda^{(2)}$$

$$= \int \frac{dR_\Lambda}{d\Lambda} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(3)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(3)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1}$$

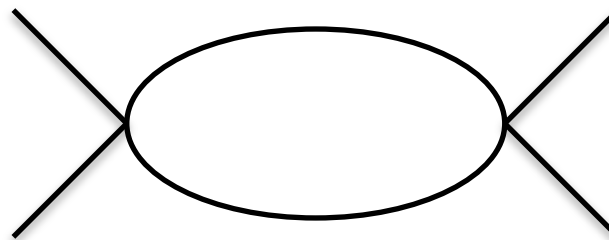
$$- \frac{1}{2} \int \frac{dR_\Lambda}{d\Lambda} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1} \Gamma_\Lambda^{(4)} \left[\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda \right]^{-1}$$

$O(N) \phi^4$ 理論の解析

$$\frac{d}{d\Lambda} \hat{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)} = N \int \frac{dR_{\Lambda}}{d\Lambda} G^2 \left\{ \left(\hat{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)} \right)^2 G - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)} \right\}$$

- この式は閉じていて

$$\hat{\Gamma}_{\Lambda}^{(2)}(p) = \frac{u}{3} \left[1 + \frac{Nu}{6} \int_q \frac{1}{q^2 + w + R_{\Lambda}(q^2)} \frac{1}{(p-q)^2 + w + R_{\Lambda}((p-q)^2)} \right]^{-1}$$



“bubble diagram”

exact!

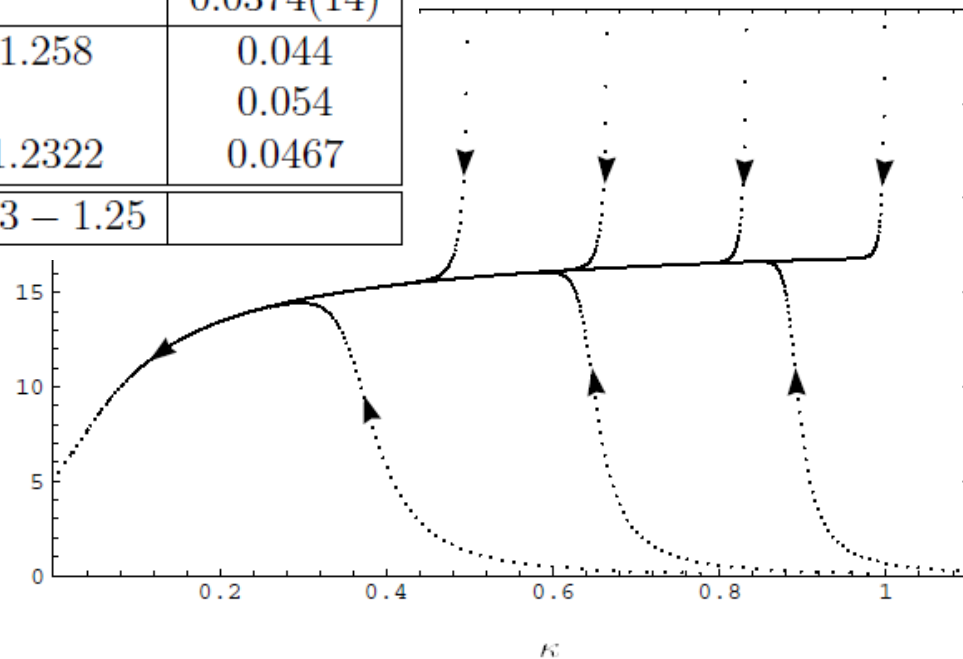
$$\hat{\Gamma}_{\Lambda \rightarrow 0}^{(2)}(p) = \frac{u}{3} \left[1 + \frac{Nu}{6} \int_q \frac{1}{q^2 + w} \frac{1}{(p-q)^2 + w} \right]^{-1}$$

$O(N) \phi^4$ 理論の解析

• Finite N に対する(数値的な)結果

- J. Berges, N. Tetradis, C. Wetterich, Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics, Phys. Rep. 363, 223(2002).

	ν	β	γ	η
(a)	0.6304(13)	0.3258(14)	1.2396(13)	0.0335(25)
(b)	0.6290(25)	0.3257(25)	1.2355(50)	0.0360(50)
(c)	0.6315(8)		1.2388(10)	
(d)	0.6294(9)			0.0374(14)
(f)	0.643	0.336	1.258	0.044
(g)	0.6181			0.054
(h)	0.6307	0.3300	1.2322	0.0467
(i)	0.625(6)	0.316 – 0.327	1.23 – 1.25	



gauge 理論への応用

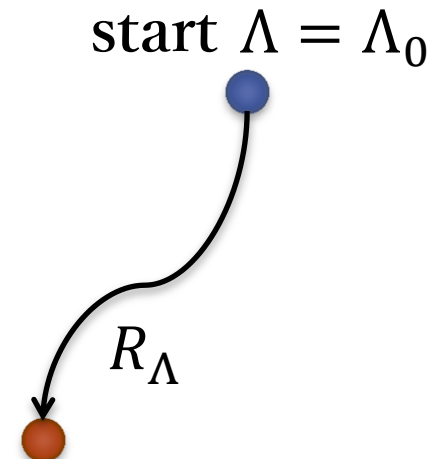
- BRST 対称性 $\leftrightarrow$ cut-off
- $\delta_{BRST} \Delta S_\Lambda \neq 0$
 - gauge 不変な flow を作る
 - $o(\Lambda)$ で対称性を破る項を入れる

→ modified Slavnov-Taylor identity

- 行うべき計算

- modified S.T. id. から S_{Λ_0}
- Wetterich で flow
- 近似 : vertex expansion
- $\Lambda \rightarrow 0$ で effective action !

($\Gamma_{\Lambda \rightarrow 0}$ は BRST をもっている) goal $\Lambda = 0$



Slavonov-Taylor id.

- BRST symmetry

$$\delta_{BRST}\Phi = \epsilon \varsigma\Phi, \quad (\delta_{BRST}A_\mu^a = \epsilon D_\mu^{ab}c^b \text{ など})$$

$$\varsigma \left\{ \int \mathcal{D}\phi \ e^{-S[\phi]+J\cdot\phi+Q\cdot\varsigma\phi} \right\} = 0$$

$$\longrightarrow \int_x \frac{\delta\Gamma[\Phi, Q]}{\delta Q_i(x)} \frac{\delta\Gamma[\Phi, Q]}{\delta\Phi_i(x)} = \underline{0}$$

$\Lambda \neq 0$ で modified

- 解く と... (U. Ellwanger, Phys.Lett. B335, 364 (1994))

$$\Delta_{mSTI} \left[\Gamma_{AA,\Lambda}^{(2)} \right]_{\mu\nu}^\perp(p) \sim m_{\Lambda_0} \Pi_{\mu\nu}^\perp(p)$$

$$\Delta_{mSTI} \left[\Gamma_{AA,\Lambda}^{(2)} \right]_{\mu\nu}^\parallel(p) \sim \alpha(\Lambda) \Lambda^2 \Pi_{\mu\nu}^\parallel(p)$$

Y-M 理論

- Wetterich eqs.

$$\partial_t \overset{-1}{\longrightarrow} = + \text{[triangle with fermion loop]} + \text{[triangle with scalar loop]}$$

$$\partial_t \overset{-1}{\text{[wavy line]}} = + \text{[triangle with fermion loop]} - 2 \text{[triangle with scalar loop]} - \frac{1}{2} \text{[triangle with ghost loop]}$$

$$\partial_t \text{[vertex]} = - \text{[triangle with fermion loop]} - \text{[triangle with scalar loop]}$$

$$\partial_t \text{[ghost vertex]} = - \text{[triangle with fermion loop]} + 2 \text{[triangle with scalar loop]} + \text{[triangle with ghost loop]}$$

$$\partial_t \text{[cross]} = + \text{[triangle with fermion loop]} - \text{[triangle with scalar loop]} + \text{[triangle with ghost loop]} - 2 \text{[square with fermion loop]}$$

有限温度 Y-M 理論

- screening mass m_s

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \langle A_0(x) A_0(0) \rangle = c_e e^{-m_s x}$$

- magnetic/electric projection

$$\Pi_{\mu\nu}^M(p) = (1 - \delta_{0\mu})(1 - \delta_{0\nu}) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{\vec{p}^2} \right)$$

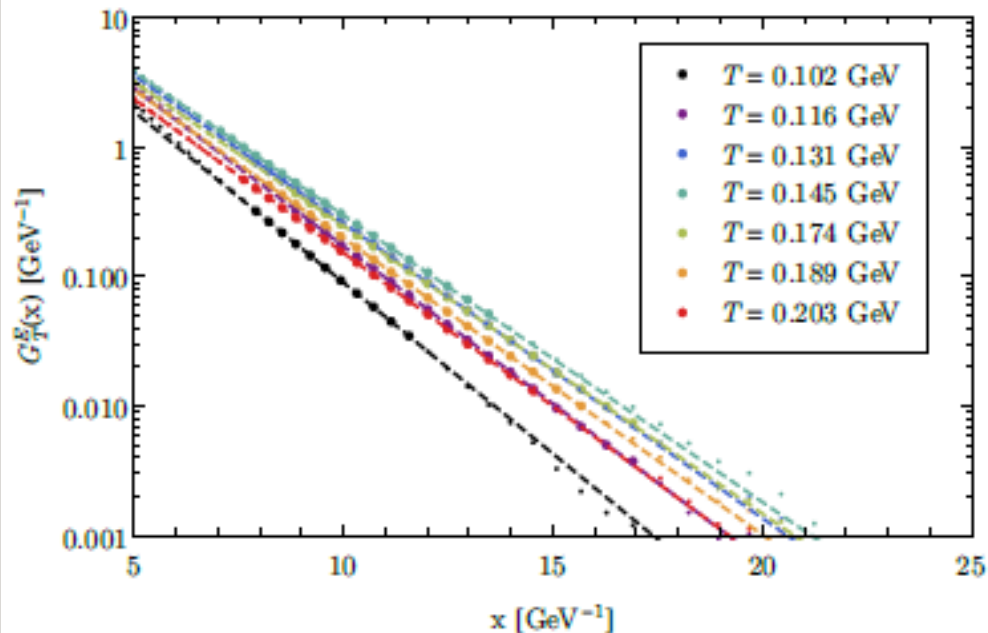
$$\Pi_{\mu\nu}^E(p) = \Pi_{\mu\nu}^\perp(p) - \Pi_{\mu\nu}^M(p)$$

- dressing function $Z^{M/E}$

$$\left[\Gamma_{AA}^{(2)} \right]_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} p^2 \{ Z^M(p) \Pi_{\mu\nu}^M(p) + Z^E(p) \Pi_{\mu\nu}^E(p) \}$$

有限温度 Y-M 理論

- $\langle A_0(x)A_0(0) \rangle$

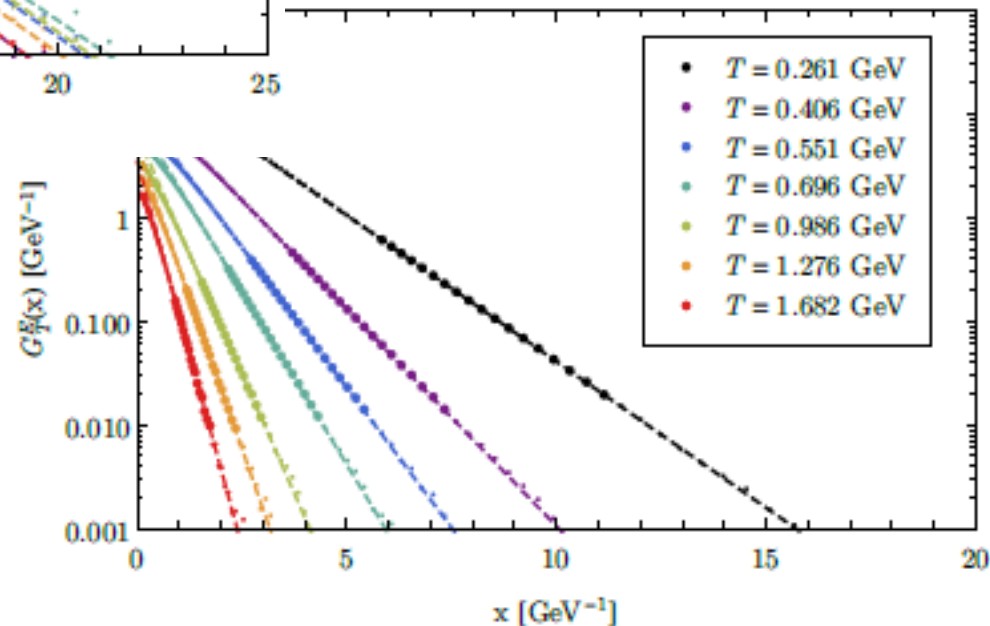


低温 $T \ll T_c$

$$c_a x^{1-4\kappa} + c_e e^{-m_s x}$$

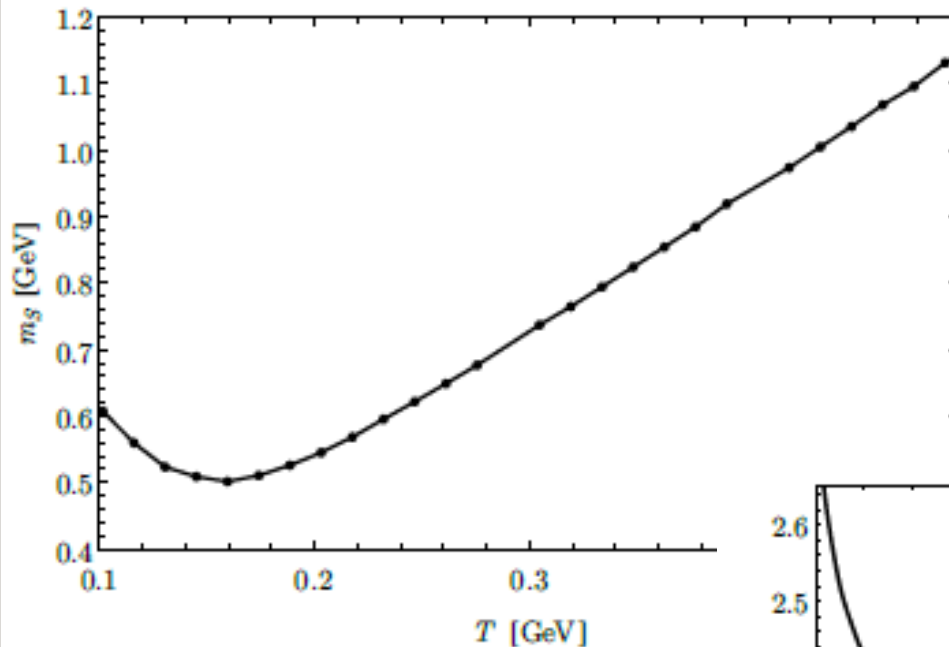
高温 $T \gtrsim T_c$

$$c_e e^{-m_s x}$$

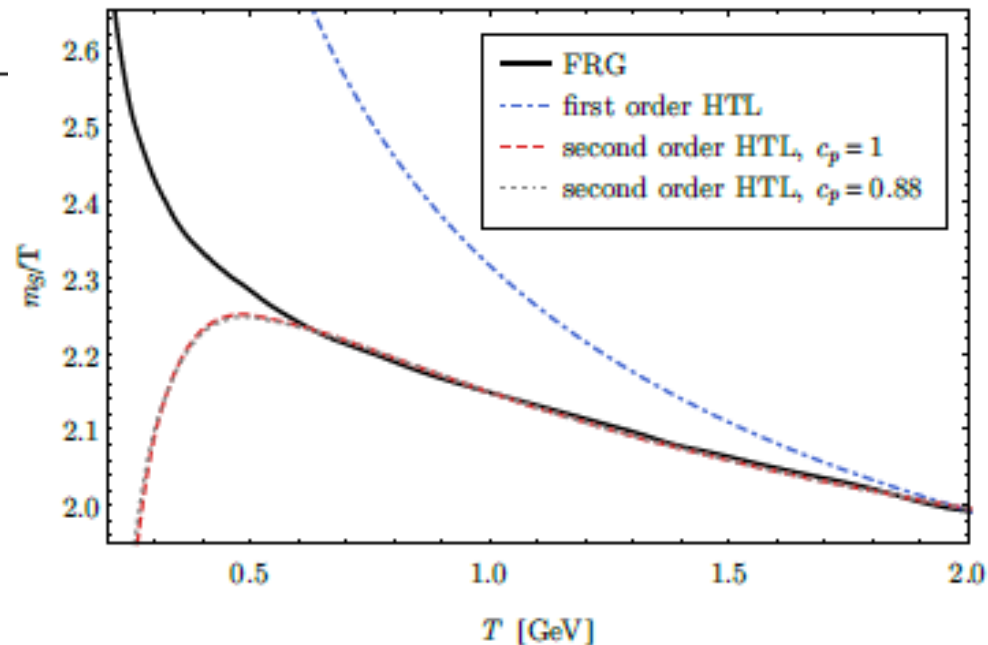


有限温度 Y-M 理論

- screening mass

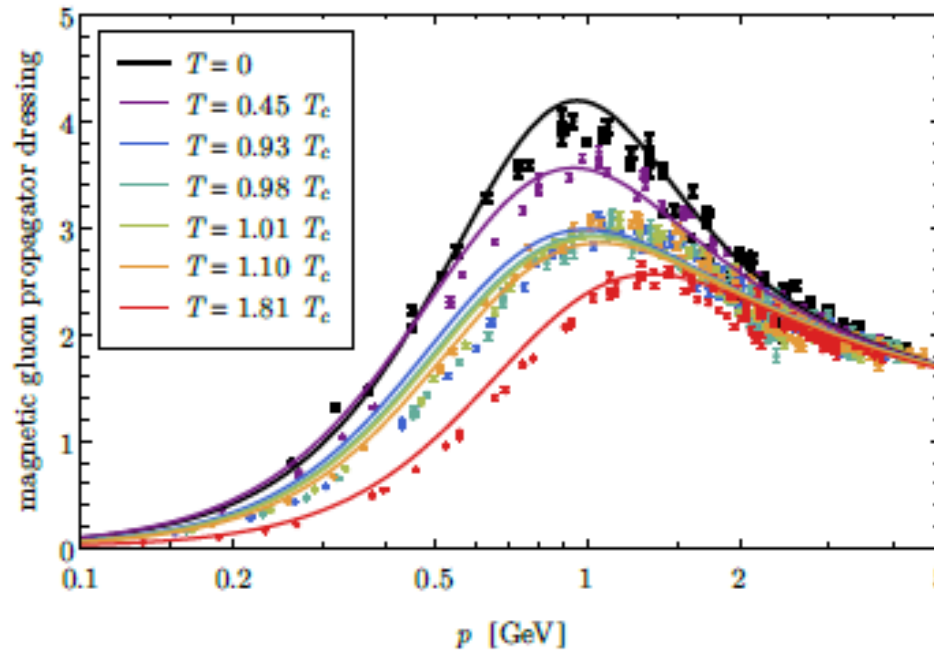


0.6 GeV ~
摂動論の結果と一致



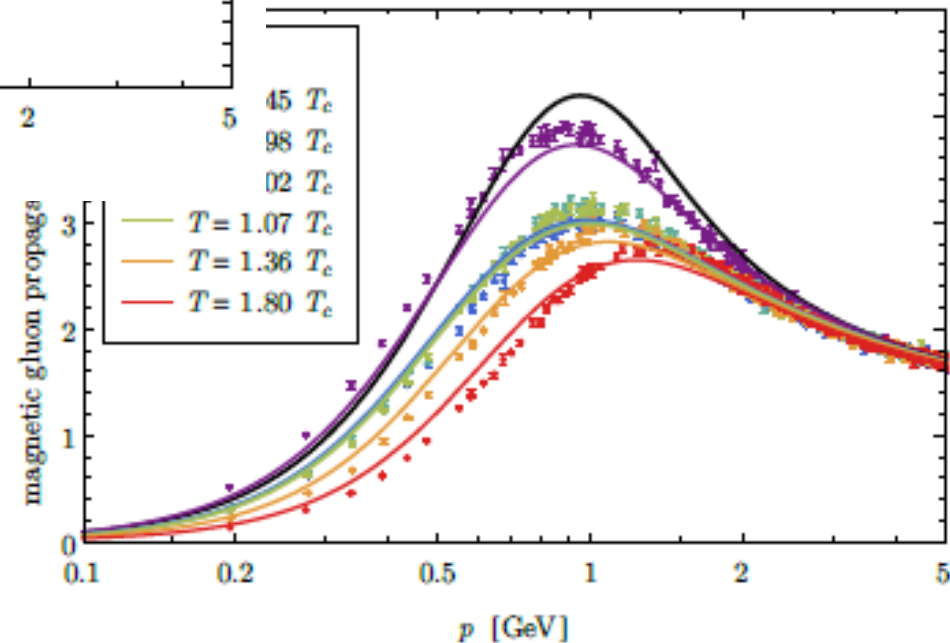
有限温度 Y-M 理論

- magnetic dressing



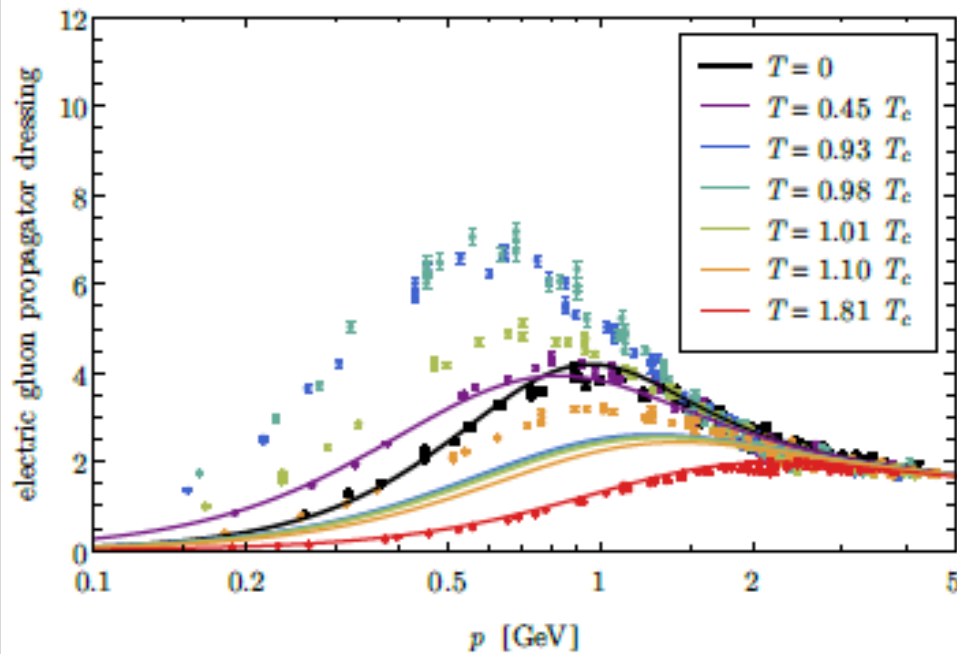
$SU(3) \rightarrow$

$\leftarrow SU(2)$



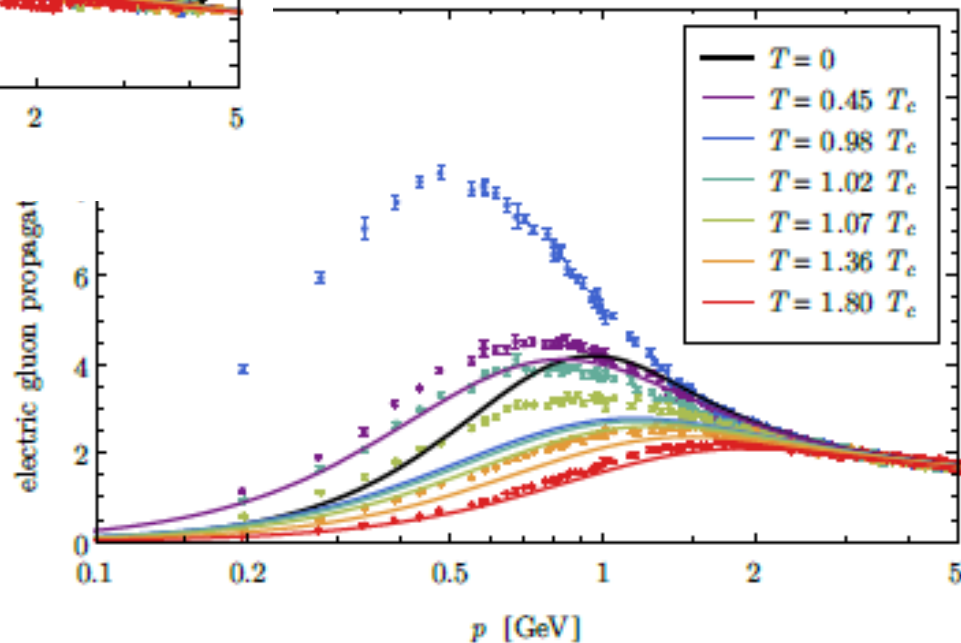
有限温度 Y-M 理論

- electric dressing



← $SU(2)$

$SU(3) \rightarrow$



まとめ

- Wilson流の繰り込み群
 - 有効作用のスケール依存性を追う
 - 繰り込み群方程式 = Wetterich eq.
 - cut-off 関数 R_Λ
 - vertex expansion などの近似法
- $\mathcal{O}(N) - \phi^4$ theory の解析
 - large N での解析計算
 - finite N での数値計算
- Yang-Mills theory
 - BRST 対称性 $\rightarrow$ modified Slavnov-Taylor id.
 - Debye mass, dressing function の計算