格子QCDで粘性係数を計算する

谷口裕介

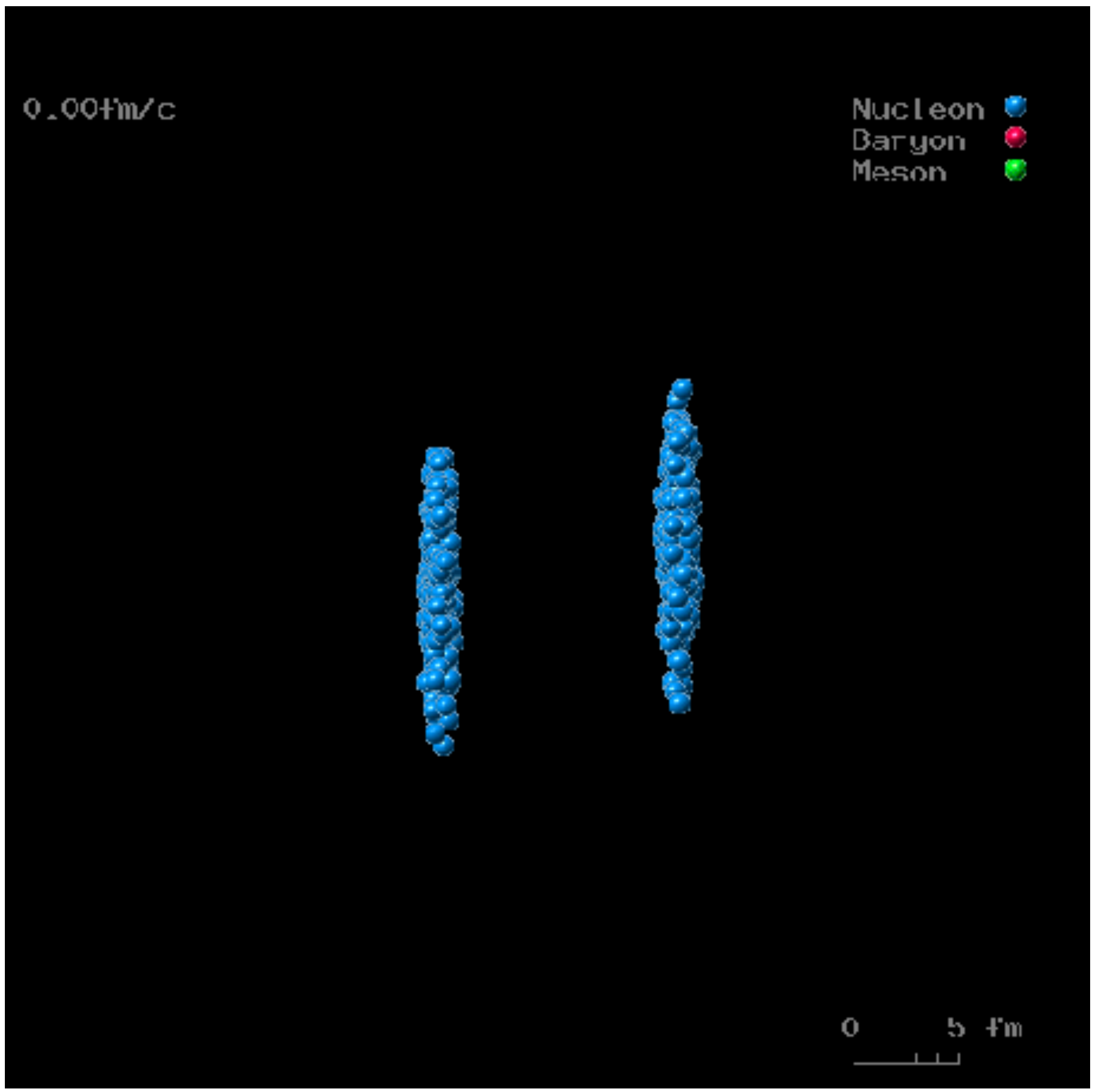
2017/11/17 journal club

Karsch, Wyld (1987)
Nakamura, Sakai (2005)
Meyer (2007,2009)
ITEP Lattice group (ロシア) (2017)

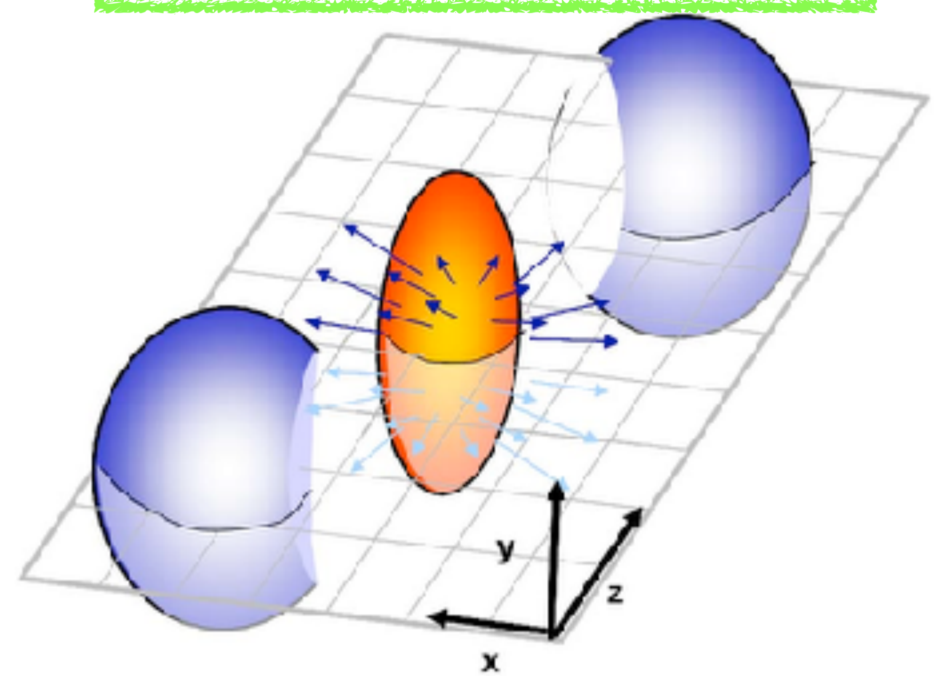
全部quench

QGPの粘性係数が面白い

- BNL RHIC: 高エネルギー重イオン衝突実験 (2001)



Elliptic flowの発見



- non central collision
- 一様な黒体輻射ではない
- 粒子の運動量分布に系統的な偏り
- QGP中の集団運動のシグナル

QGPの粘性係数が面白い

$\boxed{\text{QGP中の集団運動}}$

- 強結合相互作用に基づいている
  - ボルツマン方程式による記述　Molnar, Gyulassy(2002)

→ 衝突項の散乱断面積=50x(摂動論の断面積

- 強結合相互作用に基づく集団運動＝流体運動
- 流体模型による記述　Teany(2003)

→ 粘性が極めて小さい　$\frac{\eta}{s} \sim 0.04$

- AdS/CFTにも続く予言　Policastro, Son, Starinets(2001)

$$\frac{\eta}{s} \sim \frac{1}{4\pi} \sim 0.08$$

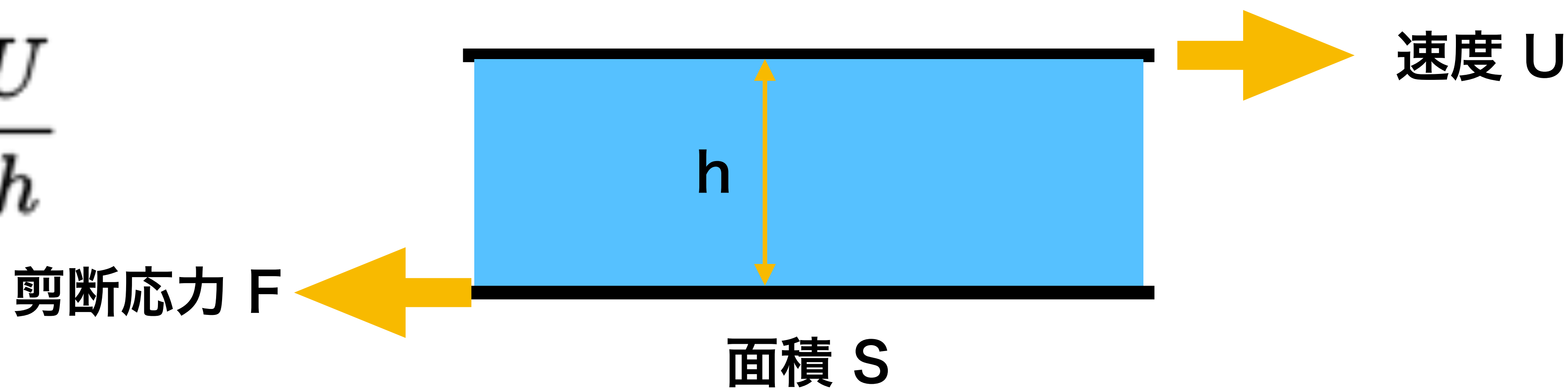
現実世界の粘性の最小値か？

Kovutun, Son, Starinets(2004)

粘性係数

ずれ粘性: shear viscosity (Wikipedia)

$$\tau = \frac{F}{S} = \mu \frac{U}{h}$$



一般化 $$f_{ij} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

体積粘性: bulk viscosity (Wikipedia)

$$f_{ii} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

場の理論で粘性係数を求めるには？

場の理論における応力＝エネルギー運動量テンソル

保存カレント $$T_{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial^\mu \phi} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

自由ダスト流体系 $$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

各成分の意味 EMANの物理学 (Google先生)

$$T^{00} = \gamma \rho u^0 = \epsilon$$ **エネルギー密度**

$$T^{0i} = \gamma \rho u^i = \pi^i$$ **運動量密度**

$$T^{11} = \pi^1 v^1$$ **単位時間にx方向の単位面積を抜け出す運動量密度**

運動量の時間変化＝力 → **圧力**

$$T^{12} = \pi^1 v^2$$ **単位時間にy方向の単位面積を抜け出す運動量密度**

→ **応力 f^{12}**

場の理論で粘性係数を求めるには？

計算すべき量　　$\langle T^{12} \rangle_\beta = \eta \partial^1 u^2$

しかし熱平衡系では　$\langle T^{12} \rangle_\beta = 0$

$\boxed{\text{流体運動は非平衡系の現象}}$

大局的な熱平衡系の中で起こる微細な非平衡現象

- 非平衡統計力学
- 非平衡効果を実時間形式の外場として取り入れる
  - 外場として導入された揺らぎからの緩和過程を見る

非平衡系の場の理論

$\boxed{\text{実時間形式}}$

$$\langle \Delta \hat{T}_{ij}(t,\vec{x})\rangle_{\rm neq} = {\rm Tr}\left(\hat{\rho}_{\rm neq}\Delta \hat{T}_{ij}(t,\vec{x})\right)$$

$$\hat{\rho}_{\rm neq} = \frac{\exp\left(-\beta \hat{H} + \beta \int d^3x \hat{O}(\vec{x})J(\vec{x})\right)}{{\rm Tr}\exp\left(-\beta \hat{H} + \beta \int d^3x \hat{O}(\vec{x})J(\vec{x})\right)}$$

$$\exp\left(-\beta \hat{H} + \beta \int d^3x \hat{O}(\vec{x})J(\vec{x})\right) = \exp\left(-\beta \hat{H}\right) T_\tau \exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \hat{O}(-i\tau,\vec{x})J(\vec{x})\right)$$

微小外場の元で線型近似を行う

$$\langle \Delta \hat{T}_{ij}(t,\vec{x})\rangle_{\rm neq} = \int_0^\beta d\tau \int d^3x' \langle \Delta \hat{O}(-i\tau,\vec{x}')\Delta \hat{T}_{ij}(t,\vec{x})\rangle_\beta J(\vec{x}')$$

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\beta \hat{H}\right)}{{\rm Tr}\exp\left(-\beta \hat{H}\right)}$$

場の理論で粘性係数を求めるには？

速度場を外場とする　$J(\vec{x}) = u_l(\vec{x})$

外場に結合する保存電荷密度は　$T_{0l}(\vec{x})$

- エネルギー運動量テンソルの保存則

- 時間反転対称性

$$\langle \Delta \hat{T}_{ij}(t,\vec{x}) \rangle_{\rm neq} = -\int_0^t ds \int d^3x' \underbrace{\int_0^\beta d\tau \langle \Delta \hat{T}_{ij}(s - i\tau, \vec{x}) \Delta \hat{T}_{kl}(0, \vec{x}') \rangle_\beta}_{\text{久保の応答関数}} \partial_k u_l(\vec{x}')$$

- 並進対称性

- 微分展開

$$\eta = -\int_0^\infty dt \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \langle \Delta \hat{T}_{12}(t - i\tau, \vec{x}) \Delta \hat{T}_{12}(0, \vec{0}) \rangle_\beta$$

スペクトル関数

$\boxed{\text{久保の応答関数は格子上では計算できない}}$ $\displaystyle\int_0^\beta d\tau \langle \Delta\hat{T}_{ij}(t-i\tau,\vec{x})\Delta\hat{T}_{kl}(0,\vec{0})\rangle_\beta$

$\boxed{\text{解析接続を使ってEuclid空間上の相関関数に変換する}}$

$\boxed{\text{間を取り持つもの＝スペクトル関数}}$

$$\rho(k) \equiv \int d^4x e^{-ikx} \left\langle \left[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(0)\right] \right\rangle_\beta = G^P(k) - G^N(k)$$

$$G^P(x) = \langle \hat{\phi}(x)\hat{\phi}(0)\rangle_\beta = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} G^P(k)$$

$$G^N(x) = \langle \hat{\phi}(0)\hat{\phi}(x)\rangle_\beta = G^P(t-i\beta,\vec{x})$$

$$G^N(k) = e^{-\beta k_0} G^P(k)$$

$$G^P(k) = \frac{e^{\beta k_0}}{e^{\beta k_0}-1}\rho(k)$$

スペクトル関数

$\boxed{\text{有限温度伝搬関数（松原伝搬関数）}}$

$$\Delta_M(i\omega_n,\vec{k}) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}}\langle\hat{\phi}(-i\tau,\vec{x})\hat{\phi}(0,\vec{0})\rangle_\beta$$

$$= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}e^{-ik_0(-i\tau)}G^P(k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_0}{2\pi}\frac{\rho(k)}{k_0-i\omega_n}$$

スペクトル関数

$\boxed{\text{久保の応答関数}}$

$$\Delta_K(k) = \int_0^\beta d\tau \int dt e^{ik_0 t} \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \langle \hat{\phi}(t - i\tau, \vec{x}) \hat{\phi}(0, \vec{0}) \rangle_\beta$$

$$= \int_0^\beta d\tau \int dt e^{ik_0(t+i\tau)} \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \langle \hat{\phi}(t', \vec{x}) \hat{\phi}(0, \vec{0}) \rangle_\beta$$

$$= \int_0^\beta d\tau e^{-k_0\tau} G^P(k) \; = \frac{\rho(k)}{k_0}$$

$\boxed{\text{shear viscosity}}$

$$\eta = \int_0^\infty dt \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \langle \Delta\hat{T}_{12}(t - i\tau, \vec{x}) \Delta\hat{T}_{12}(0, \vec{0}) \rangle_\beta$$

$$= \lim_{k_0 \to 0} \frac{\rho(k_0, \vec{0})}{2k_0}$$

格子計算の問題点

スペクトル関数を格子上で如何に計算するか？

$$\int d^3x \langle \hat{\phi}(-i\tau, \vec{x}) \hat{\phi}(0, \vec{0}) \rangle_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \frac{\cosh k_0 \left(\tau - \frac{\beta}{2}\right)}{\sinh k_0 \frac{\beta}{2}} \rho(k_0, \vec{0})$$

τ は離散化された有限個の点 ➡ 病的な逆解き問題

歴代の取り組み

- スペクトル関数のモデル化
- 最大エントロピー法
- Backus-Gilbert法

格子計算の問題点

エネルギー運動量テンソルの繰り込み

歴代の取り組み

- tree level Karsch coefficient
- non-perturbative Karsch coefficient

未来の取り組み

- gradient flow

スペクトル関数のモデル化

Karsch, Wyld (1987)
Nakamura, Sakai (2005)
Meyer (2007,2009)
ITEP Lattice group (ロシア) (2017)

Breit-Wigner ansatz

$$\frac{\rho(\omega)}{\omega} = \frac{F}{1 + b^2(\omega - \omega_0)^2} + \frac{F}{1 + b^2(\omega + \omega_0)^2}$$

hard thermal loop ansatz

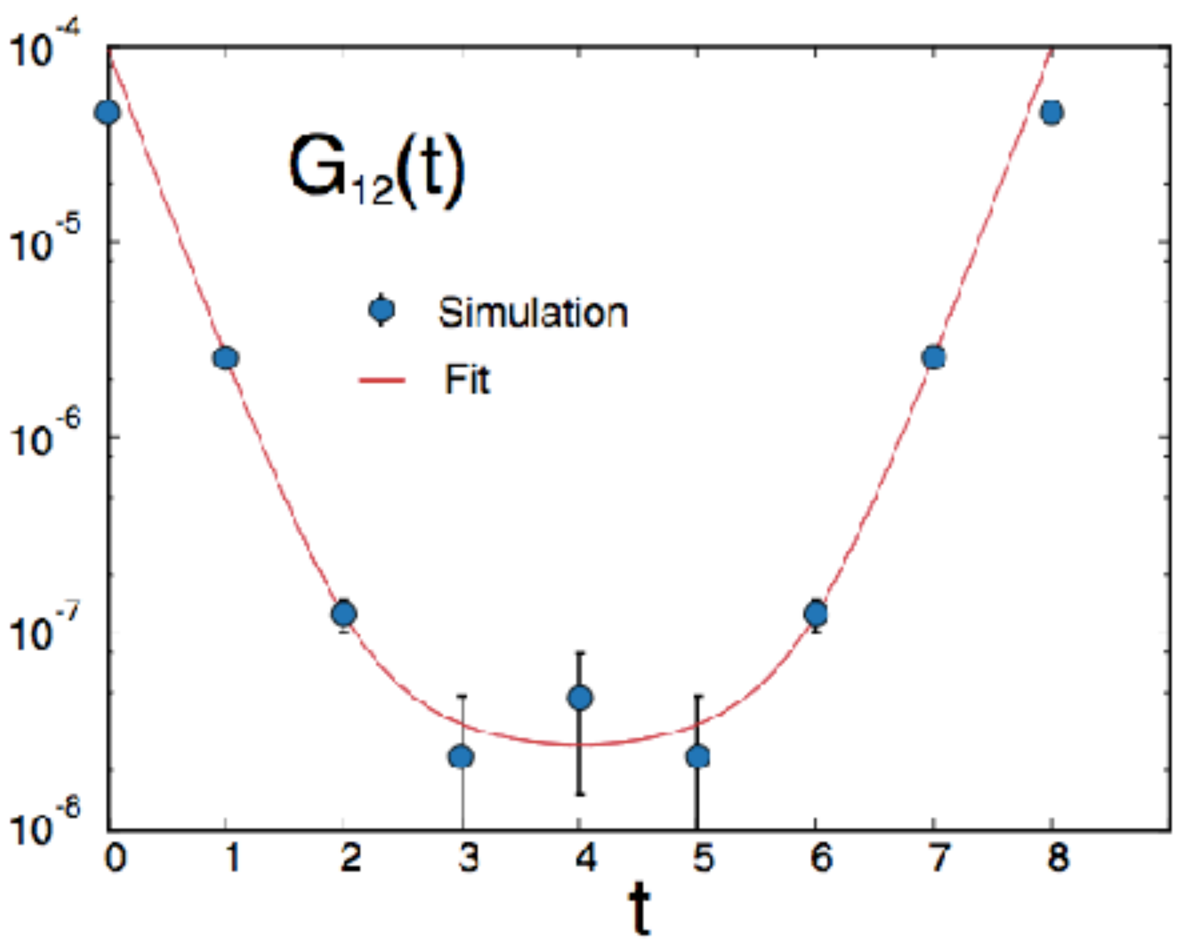
$$\frac{\rho(\omega)}{\omega} = \frac{\frac{\eta}{\pi}}{1 + b^2\omega^2} + \theta(\omega - \omega_0)\frac{A\omega^3}{\tanh\frac{\omega}{4T}}$$

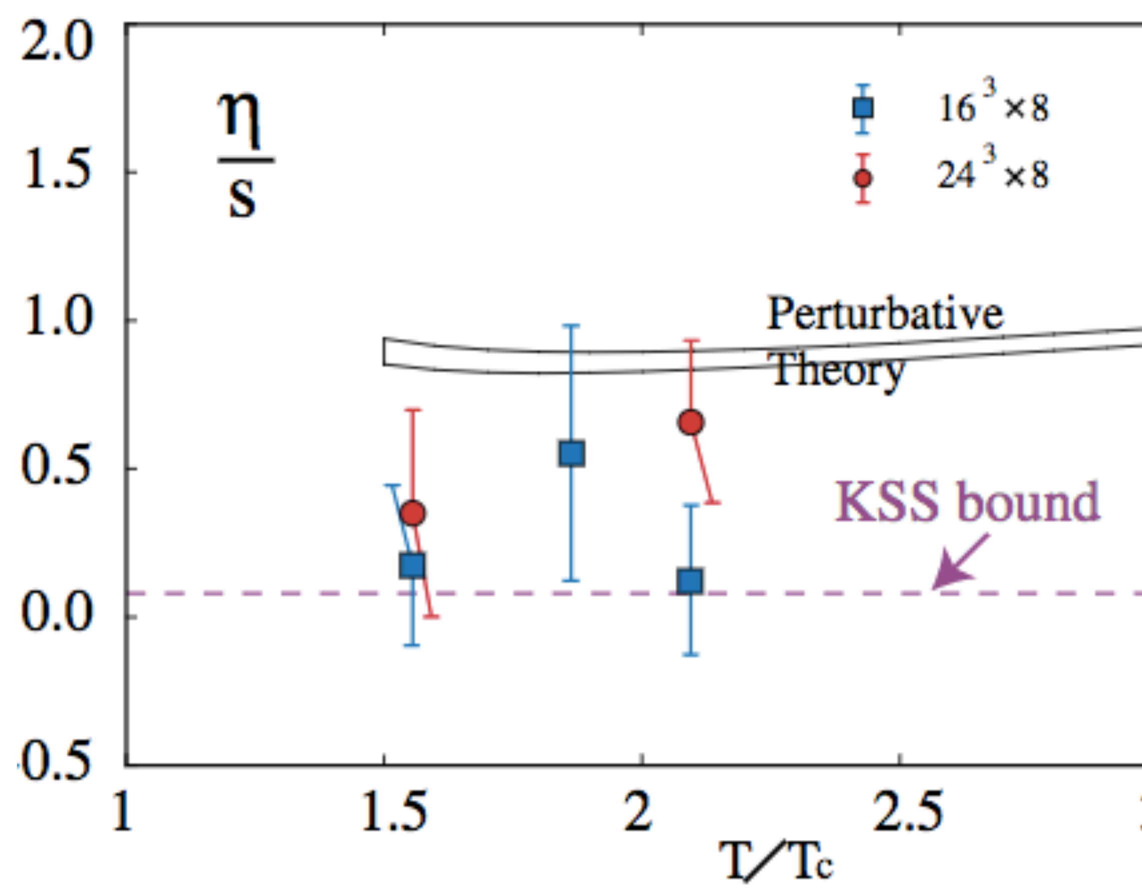
格子上の伝搬関数をfitする

スペクトル関数のモデル化

Karsch, Wyld (1987) → データ点が足りずに失敗

Nakamura, Sakai (2005)





Backus-Gilbert method

$$G(\tau_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\cosh \omega \left(\tau_n - \frac{\beta}{2}\right)}{\sinh \frac{\omega\beta}{2}} \rho(\omega)$$

- 線形問題として書き表す $y_n = K_{nm} x_m + n_n$ M>N
  ノイズ

- 推定値は逆解き問題 $\tilde{x}_m = L_{mn} \left(K_{nk} x_k + n_n \right)$

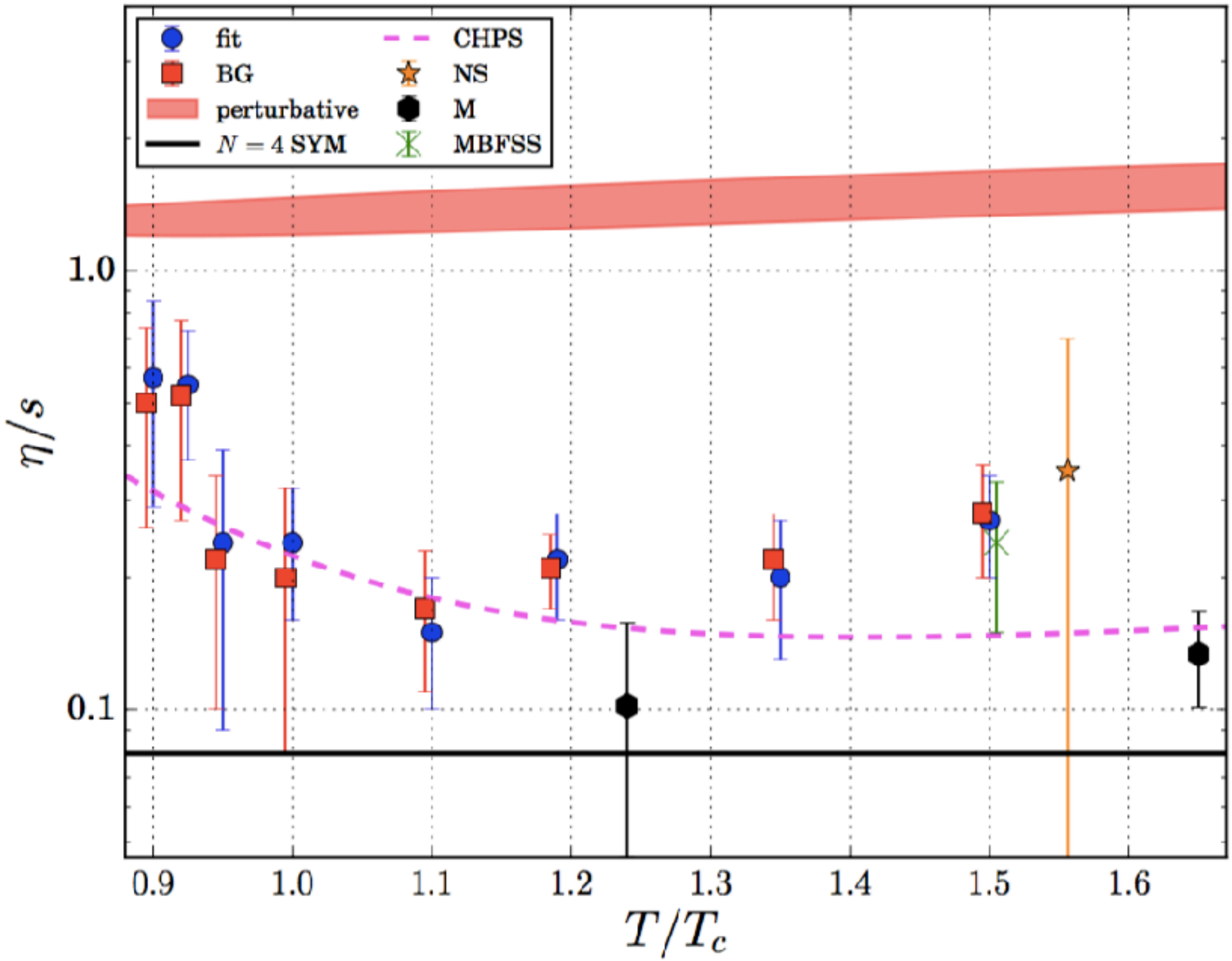
$L_{mn} K_{mk} = \delta_{mk}$ に最も近いLを探せ

- 同時最小化問題

$$J_1 = \sum_{j=1}^{N} (i-j)^2 \left((LK)_{ij} - \delta_{ij} \right)^2$$

$$J_2 = L(nn^T)^T$$

数値結果 shear viscosity



数値結果 bulk viscosity