EMT from the Yang-Mills gradient flow

Hiroki Makino, Hiroshi Suzuki

PTEP 2014, 063B02(2014)

文献紹介 11/10(Fri.) 馬場

Motivation

有限温度格子QCDのダイナミクスを見たい。

有限温度の場の理論：時間を逆温度と同一視することに
よって場の理論に温度を入れる。
→時間を含めた議論が困難

そこで、$\boxed{\text{EMT}}$を使うと熱力学量や流体的な量を議論する
ことができる

並進対称性のネーターカレント

格子正則化は時空の対称性を破っておりとても相性が悪い

gradient flow法を用いるとこの問題が解決する

発表の流れ

1、gradient flow

2、EMTの構成

3、Background field method

4、まとめ

Gradient flowの定義

ゲージ場のgradient flow Luscher(2010)

$$\partial_t B_\mu(t,x) = -g_0^2 \frac{\delta S}{\delta B_\mu} = D_\nu G_{\nu\mu}(t,x)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + \left[B_\mu, B_\nu\right] \qquad D_\mu = \partial_\mu + \left[B_\mu, \cdot\ \right]$$

$$B_\mu(t=0,x) = A_\mu(x)$$

$$\begin{aligned}\partial_t B_\mu(t,x) &= D_\nu G_{\nu\mu}(t,x) \\ &\to D_\nu G_{\nu\mu}(t,x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu \\ &= \partial^2 B_\mu - (\alpha_0 - 1)\partial_\mu \partial_\nu B_\nu + R_\mu\end{aligned}$$

非斉次項R_μは、

$$R_\mu = 2\left[B_\nu, \partial_\nu B_\mu\right] - \left[B_\nu, \partial_\mu B_\nu\right] + (\alpha_0 - 1)\left[B_\mu, \partial_\nu B_\nu\right] + \left[B_\nu, \left[B_\nu, B_\mu\right]\right]$$

この方程式の解は、熱核$K_t(z)_{\mu\nu}$を用いて

$$B_\mu(t,x) = \int d^D y \left\{K_t(x-y)_{\mu\nu} A_\nu(y) + \int_0^t ds\ K_{t-s}(x-y)_{\mu\nu} R_\nu(s,y)\right\}$$

特に$\alpha_0 = 1$の時、

$$K_t(z)_{\mu\nu} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ipz} \left\{e^{-tp^2}\right\} = \frac{e^{-z^2/4t}}{(4\pi t)^{D/2}}$$

$x \sim \sqrt{8t}$に拡散している

このようにflowした場を使えば、局所積が自動的にくりこまれた演算子となる。

$$\left\langle G^a_{\mu\nu}(t,x)G^a_{\mu\nu}(t,x)\right\rangle \sim \frac{g^2(1/\sqrt{8t})}{t^2}$$

UV発散の無い有限な値となる

→ 複合演算子を、正則化に依らない形で書ける！

次元正則化でのEMTをflowした場で表すことが出来れば、格子上で、EMTを再現できるはず！

EMTの構成

D次元ユークリッド空間でのSU(N)Yang-Mills理論

$$S_{YM} = \frac{1}{4g_0^2}\int d^D x\, F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x)$$

この下でのEMTは

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g_0^2}\left[F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x)\right]$$

$\left\{T_{\mu\nu}\right\}_R(x) = T_{\mu\nu}(x) - \left\langle T_{\mu\nu}(x)\right\rangle$のトレースアノマリーは

$$\delta_{\mu\nu}\left\{T_{\mu\nu}\right\}_R(x) = -\frac{\beta}{2g_0^3}\left\{F_{\rho\sigma}^a F_{\rho\sigma}^a\right\}_R(x)$$

small flow time expansion Luscher,Weiz(2011),Suzuki(2013)

ある局所積$\mathcal{O}[A_\mu]$およびflowした$\tilde{\mathcal{O}}[B_\mu]$について

$$\tilde{\mathcal{O}}[B_\mu] \xrightarrow{t\to 0} \mathcal{O}[A_\mu]$$

と必ずしもなるわけではない。
そこで、$\tilde{\mathcal{O}}[B_\mu]$を$t \to 0$で以下のように漸近展開する。

$$\tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t,x) = \langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t,x) \rangle + \zeta_{ij}(t)\left[\mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) - \langle \mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) \rangle\right] + O(t)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{1\mu\nu}(t,x) = G^a_{\mu\rho}(t,x) G^a_{\nu\rho}(t,x) \qquad \mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\rho}(x) F^a_{\nu\rho}(x)$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x) = \delta_{\mu\nu} G^a_{\rho\sigma}(t,x) G^a_{\rho\sigma}(t,x) \qquad \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} F^a_{\rho\sigma}(x) F^a_{\rho\sigma}(x)$$

逆解きすると、

$$\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) - \langle \mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) \rangle = (\zeta^{-1})_{ij}(t) \left[\tilde{\mathcal{O}}_{j\mu\nu}(x) - \langle \mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) \rangle \right] + O(t)$$

D次元の演算子をflowした演算子で表すことが出来る。

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = \frac{1}{g_0} \left[\mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) - \langle \mathcal{O}_{1\mu\nu}(x) \rangle - \frac{1}{4} \{ \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) - \langle \mathcal{O}_{2\mu\nu}(x) \rangle \} \right]$$

$$= c_1(t) \left[\tilde{\mathcal{O}}_{1\mu\nu}(t,x) - \frac{1}{4} \tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x) \right]$$

$$+ c_2(t) \left[\tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x) - \langle \tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x) \rangle \right]$$

$$c_1(t) = \tilde{c}_1(t)$$
$$c_2(t) = \tilde{c}_2(t) + \frac{1}{4} \tilde{c}_1(t)$$

$$\tilde{c}_i(t) = \frac{1}{g_0^2} \left\{ (\zeta^{-1})_{1j}(t) - \frac{1}{4} (\zeta^{-1})_{2j}(t) \right\}$$

両辺に$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0$をかける。

左辺は乗法くりこみをしていないので、左辺$=0$
右辺も、演算子部分は同様に$=0$

よって、係数部分が

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)_0 c_i(t)=0$$

つまり、$c_i(t)$をくりこまれたパラメーター$\bar{g}$、$\bar{m}$で書くと
この時のくりこみスケールを適当にとって、

$$c_i(t)(g,m;\mu)=c_i(t)(\bar{g}\left(1/\sqrt{8t}\right),\bar{m}\left(1/\sqrt{8t}\right);1/\sqrt{8t})$$

今、$t \to 0$での漸近展開を考えているので、漸近的自由性より

$$\bar{g}\left(1/\sqrt{8t}\right) \xrightarrow{t\to 0} 0$$

つまり、この係数は摂動論的に計算をすることが出来る。

しかし、これを素直にダイアグラムを使って計算すると、
1-loopでも17個のダイアグラムを計算しなければいけない
そこで、background field methodを使って計算をする。

Background field method Suzuki(2015)

場を背景場と量子場に分ける。

$$A_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) + a_\mu(x)$$

$$B_\mu(t,x) = \hat{B}_\mu(t,x) + b_\mu(t,x)$$

この時、背景場のflow方程式を$\partial_t \hat{B}_\mu = \hat{D}_\nu \hat{G}_{\nu\mu}$とする。

$\hat{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{B}_\nu - \partial_\nu \hat{B}_\mu + \left[\hat{B}_\mu, \hat{B}_\nu\right]$ $\hat{D}_\mu = \partial_\mu + \left[\hat{B}_\mu, \cdot\ \right]$

$$\partial_t B_\mu(t,x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t,x) + \underline{\alpha_0 D_\mu \partial_\nu B_\nu(t,x)}$$

この部分がゲージ共変性を破っている。
→共変な形に修正する。

ゲージ変換$B_\mu(t,x) \to B_\mu(t,x) + D_\mu\omega(x)$から
背景場のゲージ変換を作る。

$$\hat{B}_\mu \to \hat{B}_\mu + \hat{D}_\mu\omega \qquad\qquad b_\mu \to b_\mu + [b_\mu, \omega]$$

この変換の下で共変な形に書き換えると、

$$\partial_t B_\mu(t,x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t,x) + \alpha_0 D_\mu \hat{D}_\nu b_\nu(t,x)$$

量子場のゲージ変換

$$\hat{B}_\mu(t,x) \to \hat{B}_\mu(t,x) \qquad\qquad b_\mu \to b_\mu + D_\mu\omega(t,x)$$

の下でゲージ固定項がゲージ不変な量に影響しない。

$\omega(t,x)$は$(\partial_t - \alpha_0 D_\nu \hat{D}_\nu)\omega(t,x) = -\delta\alpha_0 \hat{D}_\nu b_\nu$の解である。
このとき、ゲージ変換で$\alpha_0 \to \alpha_0 + \delta\alpha_0$と変換する。

修正したflow方程式から背景場のflow方程式を引くと
量子場のflow方程式が以下のように得られる。($\alpha_0 = 1$)

$$\partial_t b_\mu = \delta_{\mu\nu}\widehat{D}^2 b_\nu + 2\left[\hat{G}_{\mu\nu}, b_\nu\right] + \hat{R}_\mu$$

場の随伴表現の行列で表すと

$$\partial_t b_\mu^a = \left[\delta_{\mu\nu}\widehat{\mathcal{D}}^2 + 2\hat{\mathcal{G}}_{\mu\nu}\right]^{ab} b_\nu^b + \hat{R}_\mu^a$$

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\mu\nu}^{ab}(t,x) \equiv \hat{B}_\mu^c(t,x) f^{acb}$$
$$\widehat{\mathcal{D}}_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu + \widehat{\mathcal{B}}_\mu^{ab}(t,x)$$
$$\hat{\mathcal{G}}_{\mu\nu}^{ab}(t,x) = \hat{G}_{\mu\nu}(t,x) f^{acb}$$

この方程式の形式解は

$$b_\mu^a(t,x) = \int d^D y \left[\hat{K}_t^{ab}(x,y)_{\mu\nu}\, a_\nu^b + \int_0^t ds\, \hat{K}_{t-s}^{ab}(x,y)_{\mu\nu} \hat{R}_\nu^b(s,y)\right]$$

$$\partial_t \hat{K}_t^{ab}(x,y)_{\mu\nu} = \left[\delta_{\mu\lambda}\hat{\mathcal{D}}^2 + 2\hat{\mathcal{G}}_{\mu\lambda}(t,x)\right]^{ac} \hat{K}_t^{cb}(x,y)_{\lambda\nu}$$

背景場$\hat{A}(x)$がYang-Millsの運動方程式に従うとすると、

$$\hat{D}_\nu \hat{F}_{\nu\mu}(x) = 0$$

つまり、背景場はflow方程式では変化しない。
この下でkernelを簡単に書くことが出来る。

$$\hat{K}_t(x,y) = T\, exp\left\{\int_0^t ds\left[\hat{\mathcal{D}}^2 + 2\hat{\mathcal{G}}(s,x)\right]\right\}\delta(x-y)$$

$$= e^{t\left[\hat{\mathcal{D}}_x^2 + 2\hat{\mathcal{F}}(x)\right]}\delta(x-y)$$

以上を用いれば、量子場のプロパゲーターが得られる。

$$S_{YM}=\frac{1}{4g_0}\int d^Dx\, F^a_{\mu\nu}(x)F^a_{\mu\nu}(x)$$

$$S_{gf}=\frac{1}{2g_0}\int d^Dx\, \widehat{D}_\mu a^a_\mu(x)\widehat{D}_\nu a^a_\nu(x)$$

$$\left(S_{YM}+S_{gf}\right)\Big|_{O(a^2)}=-\int d^Dx\, a^a_\mu(x)\left[\delta_{\mu\nu}\widehat{\mathcal{D}}^2+2\hat{\mathcal{F}}(x)\right]^{ab} a^b_\nu$$

$$\longrightarrow \left\langle a^a_\mu(x)a^b_\nu(y)\right\rangle_0=g_0^2\left(\frac{-1}{\widehat{\mathcal{D}}_x+2\hat{\mathcal{F}}(x)}\right)^{ab}_{\mu\nu}\delta(x-y)$$

$$\left\langle b^a_\mu(t,x)b^b_\nu(s,y)\ \right\rangle_0=g_0^2\left(e^{(t+s)\left[\widehat{\mathcal{D}}^2+2\hat{\mathcal{F}}(x)\right]}\frac{-1}{\widehat{\mathcal{D}}_x+2\hat{\mathcal{F}}(x)}\right)^{ab}_{\mu\nu}\delta(x-y)$$

実際に係数の計算を行う。
この時、$G^{a}_{\nu\rho}(t,x)$や$F^{a}_{\mu\rho}(x)F^{a}_{\nu\rho}(t,x)$について、
背景場$\hat{B}_{\mu}(t,x)$の外線の下での補正を考える。

tree levelでは、flow方程式での発展はせず、

$$\left\langle G^{a}_{\mu\rho}(t,x)G^{a}_{\nu\rho}(t,x)\right\rangle_{\mathrm{1PI}} \xrightarrow{t\to 0} \hat{F}^{a}_{\mu\rho}(x)\hat{F}^{a}_{\nu\rho}(x)+O(t)$$

$$\left\langle F^{a}_{\mu\rho}(x)F^{a}_{\nu\rho}(x)\right\rangle_{\mathrm{1PI}} = \hat{F}^{a}_{\mu\rho}(x)\hat{F}^{a}_{\nu\rho}(\mathrm{x})$$

これらより、

$$G^{a}_{\mu\rho}(t,x)G^{a}_{\nu\rho}(t,x) \xrightarrow{t\to 0} F^{a}_{\mu\rho}(x)F^{a}_{\nu\rho}(x)+O(t)$$

次に、1-loop

$$\left\langle \mathrm{G}^a_{\mu\rho}(t,x)G^a_{\nu\rho}(t,x)\Big|_{O(b^2)} - \mathrm{F}^a_{\mu\rho}(x)F^a_{\nu\rho}(x)\Big|_{O(a^2)} \right\rangle$$

$$= 2g_0^2 \int_0^t d\xi \Bigg[[(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\delta}\delta_{\beta\gamma} + \cdots]\widehat{\mathcal{D}}^{ab}_\alpha \left(e^{2\xi\widehat{\Delta}}\right)^{bc}_{\beta\gamma} \widehat{\mathcal{D}}^{ca}_\delta$$

$$+\widehat{\mathcal{F}}^{ab}_{\mu\rho}\left(e^{2\xi\widehat{\Delta}}\right)^{ba}_{\rho\nu} + \widehat{\mathcal{F}}^{ab}_{\nu\rho}\left(e^{2\xi\widehat{\Delta}}\right)^{ba}_{\rho\mu}\Bigg]\ \delta(x-y)\Big|_{y=x}$$

$$(\widehat{\Delta} = \widehat{\mathcal{D}}_x + 2\widehat{\mathcal{F}}(x))$$

$$\xrightarrow{t\to 0} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\dim(G)\frac{3}{8t^2}\delta_{\mu\nu}$$

$$+\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{11}{3}\ \varepsilon(t)^{-1} + \frac{7}{3}\right] tr\left[\widehat{\mathcal{F}}(x)^2\right]_{\mu\nu}$$

$$+\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left[-\frac{11}{12}\ \varepsilon(t)^{-1} - \frac{1}{6}\right]\delta_{\mu\nu} tr\left[\widehat{\mathcal{F}}(x)^2\right]$$

$$\varepsilon(t)^{-1} = \frac{1}{\varepsilon} + \ln(8\pi t)$$

$$\mathrm{G}^a_{\mu\rho}(t,x)G^a_{\nu\rho}(t,x)$$

$$\xrightarrow{t=0} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\dim(G)\,\frac{3}{8t^2}\,\delta_{\mu\nu}$$

$$+\left\{1+\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_2(G)\left[\frac{11}{3}\,\varepsilon(t)^{-1}+\frac{7}{3}\right]\right\}F^a_{\mu\rho}(x)F^a_{\nu\rho}(x)$$

$$+\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_2(G)\left[-\frac{11}{12}\,\varepsilon(t)^{-1}-\frac{1}{6}\right]\delta_{\mu\nu}F^a_{\rho\sigma}(x)F^a_{\rho\sigma}(x)$$

$$\zeta_{11}(t)=1+\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_2(G)\left[\frac{11}{3}\,\varepsilon(t)^{-1}+\frac{7}{3}\right]$$

$$\zeta_{12}(t)=\frac{g_0^2}{(4\pi)^2}C_2(G)\left[-\frac{11}{12}\,\varepsilon(t)^{-1}-\frac{1}{6}\right]$$

$$c_1(t) = \frac{1}{g_0^2}[2 - \zeta_{11}(t)]$$

$$c_2(t) = \frac{1}{g_0^2}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon\zeta_{12}(t)\right]$$

ゲージ結合のくりこみは、MSスキームで

$$\frac{1}{g_0^2} = \frac{1}{g^2} + b_0(\frac{1}{\varepsilon} - \ln\mu^2) \qquad b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2}C_2(G)\frac{11}{3}$$

これらをまとめると $\left(\varepsilon \to 0、\mu^2 = 1/\sqrt{8t}\right)$

$$c_1(t) = \frac{1}{g^2} - b_0\ln\pi - \frac{1}{(4\pi)^2}C_2(G)\frac{7}{3}$$

$$c_2(t) = \frac{1}{8}b_0$$

トレースアノマリーのチェック

$$\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = c_1(t)\left[\tilde{\mathcal{O}}_{1\mu\nu}(t,x) - \frac{1}{4}\tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x)\right]$$
$$+c_2(t)\left[\tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x) - \left\langle\tilde{\mathcal{O}}_{2\mu\nu}(t,x)\right\rangle\right]$$

$$\delta_{\mu\nu}\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = \mathrm{c}_2(\mathrm{t})\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}\Big[G^a_{\rho\sigma}(t,x)G^a_{\rho\sigma}(t,x)$$
$$-\left\langle G^a_{\rho\sigma}(t,x)G^a_{\rho\sigma}(t,x)\right\rangle\Big]$$
$$= \frac{1}{2}b_0\left[G^a_{\rho\sigma}(t,x)G^a_{\rho\sigma}(t,x) - \left\langle G^a_{\rho\sigma}(t,x)G^a_{\rho\sigma}(t,x)\right\rangle\right]$$

本来のものは

$$\delta_{\mu\nu}\{T_{\mu\nu}\}_R(x) = -\frac{\beta}{2g_0^3}\{F^a_{\rho\sigma}F^a_{\rho\sigma}\}_R(x)$$

→leadingが見えている。

まとめ

flowした演算子のD次元の演算子での漸近展開を考えた。

この時の係数は漸近的自由性より摂動的に求めることが出来た。

この漸近展開によって求めたEMTは、トレースアノマリーを再現している。

フェルミオンについても係数を計算しなければいけない