Weyl invariance for generalized supergravity backgrounds from the doubled formalism

J.Sakamoto, Y.Sakatani, K.Yoshida

arXiv:1703.09213v3 [hep-th] 24May2017

川口百

概要

歴史的経緯

Green-Schwarz弦の定式化にはKappa対称性が必要。
このKappa対称性をGS弦に課せばSugraが出るのではないか、
と考えられていた。
しかし、Kappa対称性を課すとSugraではなく、
余分なベクトルを含む方程式(Generalized Sugra Eq.GSE)
が出るとわかった。A. A. Tseytlin and L. Wulff, arXiv:1605.04884

このGSEは何者なのか？

・運動方程式は与えられているが古典的な作用が不明。
・GSEの解で定義された弦シグマモデルのWeyl不変性は破れている？

概要

以上をDoubled Field Theory(DFT)で解決できたというのが主張。

1.T-duality
2.DFT
3.GSEとmDFT
4.mDFT=DFT
5.Weylアノマリー
6.まとめ

1.T-duality

ターゲット空間に周期性$(x \simeq x + 2\pi R)$をもたせ、
コンパクト化する。閉弦は周期性から、複数回の巻付を考慮し、

$$X(\sigma + 2\pi) = X(\sigma) + 2\pi R\omega \quad (\omega \in \mathbb{Z})$$

と巻き付くことができる。
また、弦を周期次元周りに一周並進する演算子$e^{2\pi i R p}$が状態を不変にすることから運動量$\boldsymbol{p}$は、

$$p = \frac{n}{R}, (n \in \mathbb{Z})$$

と量子化される。

1.T-duality

この場を$z = e^{\tau - i\sigma}$として、Laurent展開、

$$\partial X(z) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha_m}{z^{m+1}},\ \bar{\partial}X(\bar{z}) = -i\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}_m}{\bar{z}^{m+1}},$$

をする。この時、弦の周りを一周する時のXの変分は、

$$2\pi R w = \oint\left(dz\partial X + d\bar{z}\bar{\partial}X\right) = 2\pi\left(\frac{\alpha'}{2}\right)^{1/2}(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0)$$

1.T-duality

一方運動量は、

$$p=\frac{1}{2\pi\alpha'}\oint\left(dz\partial X-d\bar{z}\bar{\partial}X\right)=(2\alpha')^{-1/2}\left(\alpha_0+\tilde{\alpha}_0\right)$$

である。
以上からこの二つから弦の振動のゼロモードの運動量として、

$$p_L\equiv(2/\alpha')^{1/2}\alpha_0=\frac{n}{R}+\frac{wR}{\alpha'},\ p_R\equiv(2/\alpha')^{1/2}\tilde{\alpha}_0=\frac{n}{R}-\frac{wR}{\alpha'}$$

を得る。

1.T-duality

以上から各モードの生成消滅演算子から得られるVirasoro生成子は、

$$L_0 = \underbrace{\boxed{\frac{\alpha' p_L^2}{4}}}_{\text{ゼロモード}} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n, \quad \tilde{L}_0 = \underbrace{\boxed{\frac{\alpha' p_R^2}{4}}}_{\text{ゼロモード}} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n$$

ここからハミルトニアン$H = L_0 + \tilde{L}_0$のゼロモードからの寄与は、

$$H = \frac{\alpha'}{4}\left[\frac{n^2}{R^2} + \frac{\omega^2 R^2}{\alpha'^2}\right]$$

となる。

1.T-duality

ここでハミルトニアン、

$$H = \frac{\alpha'}{4}\left[\frac{n^2}{R^2} + \frac{\omega^2 R^2}{\alpha'^2}\right]$$

を見ると、

$$R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}, \;\; n \leftrightarrow \omega$$

の入れ替えに対して不変。双対性をT双対性(T-duality)という。

1.T-duality

ここまではコンパクト方向を1つとして考えたが、実際の理論では複数次元のコンパクト化が必要。(例えば10次元→4次元)
$26-k \leq m \leq 25$としてk個の次元を周期化する。
複数次元の場合は非線形シグマモデルで考える。コンパクト方向に注目すると作用は、

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}(G_{mn}\gamma^{ab}-B_{mn}\varepsilon^{ab})\partial_a X^m\partial_b X^n$$

ここでG_{mn}はターゲット空間の計量、B_{mn}は反対称場。

1.T-duality

この場合ハミルトニアンへのゼロモードの寄与は

$$\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{1}{R^2}G^{mn}n_m n_n - \frac{2}{\alpha'}G^{mk}B_{kl}n_m\omega^l + \frac{R^2}{\alpha'^2}(G_{mn} - B_{mk}G^{kl}B_{ln})\omega^m\omega^n\right)$$

である。このT双対の対称性はO(k,k)として知られる。

しかし、この対称性は作用から全く読み取れない。

これはターゲット空間の有効理論であるSugraの作用、

$$S = \int d^D x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R + 4(\partial\phi)^2 - \frac{1}{12}H^{ijk}H_{ijk}\right]$$

でも同様。では、O(D,D)不変な理論は作れないか？

⇒Double Field Theory(DFT)

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

二重座標

$$X^M = (\tilde{x}_\mu, \tilde{y}_m, x^\mu, y^m)\ (\mu = 1, \dots, d, m = 1, \dots, n)$$

を考える。ここで内訳は、

非コンパクト座標x^μ,コンパクト座標y^m +“二重”座標 $\tilde{x}^\mu, \tilde{y}^m$

大文字添字の上げ下げには$O(D, D, \mathbb{Z})$不変計量η_{IJ}を用いる。

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix},\ \ \eta^{IJ} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ \delta_j^i & 0 \end{pmatrix},\ \ \eta^{MP}\eta_{PN} = \delta_N^M$$

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

二重空間内でのT-dualはO(D,D)の要素hで行われる。

$$h_M{}^P \eta_{PQ} h_N{}^Q = \eta_{MN} \quad h \in O(D,D)$$

例えばk方向のT-dualなら、

$$h_I{}^J = \begin{pmatrix} \delta^i_j - t^i_j & t^{ij} \\ t_{ij} & \delta^j_i - t^j_i \end{pmatrix} \quad t = diag(0...0\overset{k}{1}0...0)$$

であり、

k番目の上成分を除き
k番目の下成分を入れる

$$\mathcal{A}_I \leftrightarrow h_I{}^J \mathcal{A}_J = \begin{pmatrix} \delta^i_j - t^i_j & t^{ij} \\ t_{ij} & \delta^j_i - t^j_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^j \\ \tilde{a}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^i - \boxed{t^i_j a^j} + \boxed{t^{ij} \tilde{a}_j} \\ \tilde{a}_i - t^j_i \tilde{a}^j + t_{ij} a^j \end{pmatrix}$$

つまり大文字添字に対してスカラーになっている理論を作る。

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

$$\frac{\alpha'}{2}\left(\frac{1}{R^2}G^{mn}n_m n_n - \frac{2}{\alpha'}G^{mk}B_{kl}n_m\omega^l + \frac{R^2}{\alpha'^2}(G_{mn} - B_{mk}G^{kl}B_{ln})\omega^m\omega^n\right)$$

DFT作用は、$S = \int dX e^{-2d}\mathcal{R}$ と書け、

$\mathcal{R}$の内訳は一般化計量 $\mathcal{H}_{IJ} = \begin{pmatrix} G^{ij} & -G^{ik}B_{kj} \\ B_{ik}G^{kj} & G_{ij} - B_{ik}G^{kl}B_{lj} \end{pmatrix}$ と

二重ミンコフスキー計量 $S_{\bar{A}\bar{B}} = \begin{pmatrix} s^{\bar{a}\bar{b}} & 0 \\ 0 & s_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}$ から、

$$\mathcal{H}_{MN} = E_M^{\bar{A}} S_{\bar{A}\bar{B}} E_N^{\bar{B}},\ \eta_{MN} = E_M^{\bar{A}} \eta_{\bar{A}\bar{B}} E_N^{\bar{B}},\ G_{ij} = e_i^{\bar{a}} s_{\bar{a}\bar{b}} e_j^{\bar{b}}$$

で導出される一般化フレーム $E_M^{\bar{A}} = \begin{pmatrix} e_{\bar{a}}^i & e_{\bar{a}}^j B_{ji} \\ 0 & e_i^{\bar{a}} \end{pmatrix}$ からなる、

$\mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} = 3E^M_{[\bar{A}|}\partial_M E^N_{|\bar{B}|}E_{|\bar{C}]N}$, $\mathcal{F}_{\bar{A}} = E^{\bar{B}M}\partial_M E^N_{\bar{B}} E_{\bar{A}N} + 2E^M_{\bar{A}}\partial_M d$ を用いて、

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}\mathcal{F}_{\bar{D}\bar{E}\bar{F}}\left[\frac{1}{4}S^{\bar{A}\bar{D}}\eta^{\bar{B}\bar{E}}\eta^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{12}S^{\bar{A}\bar{D}}S^{\bar{B}\bar{E}}S^{\bar{C}\bar{F}} - \frac{1}{6}\eta^{\bar{A}\bar{D}}\eta^{\bar{B}\bar{E}}\eta^{\bar{C}\bar{F}}\right] + \mathcal{F}_{\bar{A}}\mathcal{F}_{\bar{B}}\left[\eta^{\bar{A}\bar{B}} - S^{\bar{A}\bar{B}}\right]$$

である。

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

DFTの諸量(2D次元)を通常の理論(D次元)に落とす必要がある。
よく使われるのが"Strong Constraint"

$$\eta^{MN}\partial_M\partial_N(\ldots)=0$$

これは、

$$\begin{pmatrix}\partial_i & \tilde{\partial}^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \delta^i_j \\ \delta^j_i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_j \\ \tilde{\partial}^j\end{pmatrix}(\ldots)=\begin{pmatrix}\partial_i & \tilde{\partial}^i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\partial}_i \\ \partial^i\end{pmatrix}(\ldots)\Rightarrow\tilde{\partial}^i\partial_i(\ldots)=0$$

つまり、各物理量がwindingに依存しないという条件になっている。
(DFTをSugraに落としたければwinding依存を無くせば落とせる)

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

作用を展開しStrong Constraintで落ちる項を$\Delta_{(SC)}\mathcal{R}$とまとめると、

$$S=\int dXe^{-2d}\quad\left(4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d-\partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN}-4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d+4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\partial_N d\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL}-\frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL}+\Delta_{(SC)}\mathcal{R}\right)$$

これでSugraの作用を再現できる。部分積分を駆使し、

$H_{klm}=B_{kl,m}+cycl.$ の関係でまとめると、積分の中身は、

$$e^{-2d}\left[\frac{1}{4}G^{ik}G^{il}G^{pq}\left(G_{kl,p}G_{ij,q}-2G_{lp,i}G_{kq,j}\right)+2d,iG_{ij,j}+4(\partial d)^2-\frac{1}{12}H_{klm}H^{klm}\right]$$

一方Sugra作用 $S=\int d^Dx\sqrt{-g}e^{-2\phi}\left[R+4(\partial\phi)^2-\frac{1}{12}H^{ijk}H_{ijk}\right]$ を展開しても

同じ式に行き着く。O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach　arXiv:1003.5027&1006.4823

3.GSE&mDFT Y.Sakatani, S.Uehara, K.Yoshida arXiv:1611.05856

NS-NS sectorのSugra Eq.

$$R_{ij} - \frac{1}{4} H_i^{pq} H_{jpq} + 2\nabla_i \nabla_j \phi = 0$$
$$\frac{1}{2} \nabla^p H_{pij} - H_{pij} \nabla^p \phi = 0$$
$$R + 4(\nabla^i \nabla_i \phi - (\nabla \phi)^2) - \frac{1}{12} H^2 = 0$$

generalized Sugra Eq.

$$R_{ij} - \frac{1}{4} H_i^{pq} H_{jpq} + \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$$
$$\frac{1}{2} \nabla^p H_{pij} - (X^k H_{kij} + \nabla_i X_j - \nabla_j X_i) = 0$$
$$R + 4(\nabla_m X^m - X^m X_m) - \frac{1}{12} H^2 = 0$$

$$X_m \equiv I_m + Z_m, \quad Z_m = \partial_m \phi + U_m$$

$$\nabla_m I_n + \nabla_n I_m = 0$$
$$I^k H_{kmn} + \nabla_m Z_n - \nabla_n Z_m = 0$$
$$I^m Z_m = 0$$

$$I^m = 0$$
$$U_m = 0$$

もとに戻る

3.GSE&mDFT Y.Sakatani, S.Uehara, K.Yoshida arXiv:1611.05856

GSEを出すDFTとしてmodified DFT(mDFT)が考案されている。
modifyのポイントは、ディラトン$d(e^{-2d}=e^{-2\phi}\sqrt{-G})$のシフト

$$\partial_M d \to \partial_M d + \mathcal{X}_M$$

この$\mathcal{X}_M$はGSEにて追加、導入された関係

$$\begin{aligned}
&\nabla_m I_n + \nabla_n I_m = 0\\
&I^k H_{kmn} + \nabla_m Z_n - \nabla_n Z_m = 0\\
&I^m Z_m = 0
\end{aligned}$$

を満たすよう、

$$\mathcal{X}^M \equiv \begin{pmatrix} I^m \\ U_m + B_{mn} I^n \end{pmatrix}$$ $(H_{lmn} = \partial_l B_{mn} + cycl.)$の形をとる。

4.mDFT=DFT

$\mathcal{X}^M$ は I^m をkilling方向に指定すると、

$$\mathcal{X}^M \equiv \begin{pmatrix} I^m \\ U_m + B_{mn}I^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^m \\ 0 \end{pmatrix}$$

の形にできる。ここでディラトンのシフトの関係を二重空間で見てみる。元のディラトンは(Sugraに落とす目的ゆえ)二重座標依存していないので、

$$(\partial_M d) = \begin{pmatrix} \partial_m d \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを $\mathcal{X}_M$ だけシフトすると、

$$(\partial_M d + \mathcal{X}_M) = \begin{pmatrix} \partial_m d \\ I^m \end{pmatrix}$$

になる。

4.mDFT=DFT

これは、実はディラトンをwinding方向にシフトさせたことにほかならない。
シフトしたディラトンをd_*と定義すると、

$$(\partial_M d + \mathcal{X}_M) = \begin{pmatrix} \partial_m d \\ I^m \end{pmatrix} = \partial_M d_*$$

なので、
$$d_* = d(x) + I^m \tilde{y}_m$$

mDFTは今までのDFTをwinding方向にシフトさせれば良いとわかった。言い換えると、
ディラトンがwinding方向に依存すればDFTでmDFTを表せる。
mDFTからGSEが出るのだから、DFTでGSEを説明できる。

5.Weylアノマリーの相殺

26次元のbosonic string sigma model

$$S=-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}(G_{mn}\gamma^{ab}-B_{mn}\varepsilon^{ab})\partial_a X^m\partial_b X^n$$

このエネルギー運動量テンソルのトレースはアノマリーが残る。

Fradkin-Tseytlin項 $S_{FT}=\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}R^{(\gamma)}\Phi$ を加え、

Sugraの方程式を使えばアノマリーを相殺できる。

5.Weylアノマリーの相殺

Sigma Modelの寄与	$\frac{1}{2}\left(R_{mn}-\frac{1}{4}H_{mpq}H_{n}{}^{pq}\right)$	$\frac{1}{4}\nabla^{k}H_{kmn}$
FT項からの寄与	$\nabla_m\nabla_n\Phi$	$-\frac{1}{2}\nabla_k H^{k}{}_{mn}$
Sugra Eq.	$R_{ij}-\frac{1}{4}H_i^{pq}H_{jpq}+2\nabla_i\nabla_j\phi=0$	$\frac{1}{2}\nabla^p H_{pij}-H_{pij}\nabla^p\phi=0$

しかしGSEを使うとアノマリーは相殺できない。

GSE	$R_{ij}-\frac{1}{4}H_i^{pq}H_{jpq}+\nabla_iX_j+\nabla_jX_i=0$	$\frac{1}{2}\nabla^pH_{pij}-(X^kH_{kij}+\nabla_iX_j-\nabla_jX_i)=0$

5.Weylアノマリーの相殺

前項のように、ディラトンをシフトさせるとどうなるか？
というわけでFT項のディラトンΦにwinding依存性を持たせる(S_{FT}^*)と、
EMTのS_{FT}^*からの寄与は、

$$\nabla_{(m}Z_{n)} \qquad -\frac{1}{2}(Z^k H_{kmn} + 2\nabla_{[m}I_{n]})$$

Sigma Modelの寄与が

$$\frac{1}{2}\left(R_{mn} - \frac{1}{4}H_{mpq}H_n{}^{pq}\right) \qquad \frac{1}{4}\nabla^k H_{kmn}$$

GSEは、

$$R_{ij} - \frac{1}{4}H_i^{pq}H_{jpq} + \nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0 \qquad \frac{1}{2}\nabla^p H_{pij} - (X^k H_{kij} + \nabla_i X_j - \nabla_j X_i) = 0$$

$$I^k H_{kmn} + \nabla_m Z_n - \nabla_n Z_m = 0$$

であるから、GSEを使うとアノマリーは相殺。
つまり、GSE BackgroundであってもディラトンのWinding依存を認めれば
Weylアノマリーは相殺できる。

まとめ

・GSEを導出するために作られたmDFTは
ディラトンにwinding依存性をもたせたDFTで説明できる。
・GSEを背景に持つSigma Modelのアノマリーは
ディラトンにwinding依存性を持たせれば解消できる。

・一方GSEはExceptional Field Theory(EFT)でも作れる。
A. Baguet, M. Magro and H. Samtleben arXiv:1612.07210
⇒EFTでも同様のことは可能かも……？

back up

memo

1985年の論文[Nucl. Phys. B 266 (1986) 245.]でWittenは、
10次元Super Yang-Mills理論の運動方程式が、
Light Likeな線に沿った可積分性として表現され、
この条件がSYMバックグラウンドにおけるSuperparticle
のkappa対称性と密接に関連していることを示した。
また、GS超弦のkappa対称性と超重力運動方程式との間に
同様の関係があるべきであることを示唆した。

一般化Lie微分によるB場の計算

Bの一般化Lie微分の計算は少し面倒

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{H}_{MN} = \xi^P \partial_P \mathcal{H}_{MN} - \partial^P \xi_M \mathcal{H}_{PN} - \partial^P \xi_N \mathcal{H}_{MP} \\ +\partial_M \xi^P \mathcal{H}_{PN} + \partial_N \xi^P \mathcal{H}_{MP}$$

の左下成分$B_{ik}G^{kj}$を計算する。

$$\lambda^p(\partial_p b_{mk} g^{kn}) - (\partial_p \tilde{\lambda}_m) g^{pn} - b_{mk} g^{kp} (\partial_p \lambda^n) \\ +(\partial_m \tilde{\lambda}_p) g^{pn} + (\partial_m \lambda^p) b_{pk} g^{kn}$$

これと、

$L_\lambda b_{ij} = \lambda^k \partial_k b_{ij} + b_{kj} \partial_i \lambda^k + b_{ki} \partial_j \lambda^k$ を仮定した結果を比較する。

一方、左下成分をそのまま一般化Lie微分すると、

$$\mathcal{L}_\xi(b_{mk}g^{kn}) = (\mathcal{L}_\xi b_{mk})g^{kn} + b_{mk}\mathcal{L}_\xi(g^{kn})$$

$$= (L_\lambda b_{mk} + \partial_m\tilde{\lambda}_k - \partial_k\tilde{\lambda}_m)g^{kn} + b_{mk}[\lambda^p\partial_p g^{kn} - (\partial_p\lambda^k)g^{pn} - (\partial_p\lambda^n)g^{kp}]$$

ここで $L_\lambda b_{ij} = \lambda^k\partial_k b_{ij} + b_{kj}\partial_i\lambda^k + b_{ki}\partial_j\lambda^k$ を代入すると、

$$= \lambda^p(\partial_p b_{mk})g^{kn} + b_{lk}(\partial_m\lambda^l)g^{kn} + \cancel{b_{ml}(\partial_k\lambda^l)g^{kn}} + (\partial_m\tilde{\lambda}_k - \partial_k\tilde{\lambda}_m)g^{kn}$$

$$+\lambda^p(\partial_p g^{kn})b_{mk} - \cancel{(\partial_p\lambda^k)b_{mk}g^{pn}} - (\partial_p\lambda^n)b_{mk}g^{kp}$$

この結果は $\lambda^p(\partial_p b_{mk}g^{kn}) - (\partial_p\tilde{\lambda}_m)g^{pn} - b_{mk}g^{kp}(\partial_p\lambda^n)$

$$+(\partial_m\tilde{\lambda}_p)g^{pn} + (\partial_m\lambda^p)b_{pk}g^{kn}$$

と一致する。つまり、

$$L_\lambda b_{ij} = \lambda^k\partial_k b_{ij} + b_{kj}\partial_i\lambda^k + b_{ki}\partial_j\lambda^k$$

となるということ。

ゲージ固定

導入したnull-killingベクトルは常に以下の形を取れる

$$\mathbf{X}^M \equiv \begin{pmatrix} I^m \\ U_m + B_{mn} I^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^m \\ 0 \end{pmatrix}$$

I^mをkillingベクトルとすると、これを基底とする座標がとれる。
仮にこれをy方向とすると、3-形式H_3もyに依存しない。

$$I^k H_{kmn} + \nabla_m Z_n - \nabla_n Z_m = 0$$

と一般化Lie微分

3-形式場を展開する。

$$H_3 = h_3 + c^{-1} \iota_I H_3 \wedge dy = h_3 - c^{-1} dZ \wedge dy \quad (\iota_I h_3 = 0)$$

2-形式$B_2 (H_3 = dB_2)$は、$dZ = dU$より、

$$B_2 = b_2 - c^{-1} U \wedge dy \ \ (\iota_I b_2 = 0, h_3 = db_2)$$

つまり常に、

$$\iota_I B_2 - U = 0 \ \ \therefore U_m + B_{mn} I^n = 0$$

とすることができる。つまり、

$$\mathbf{X}^M \equiv \begin{pmatrix} I^m \\ U_m + B_{mn} I^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^m \\ 0 \end{pmatrix}$$

ディラトンシフトからmDFT

・逆にディラトンに二重座標依存性をもたせるとmDFTになる。

$$d_* = d(x) + c^m \tilde{y}_m$$

関係 $\partial_M d + \mathcal{X}_M = \partial_M d_*$ から $\mathcal{X}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ c^m \end{pmatrix}$,

$$I^m = c^m, \quad U_m + B_{mn} I^n = 0$$

これはmDFTの結果(準備で示したこと)に一致。

つまりmDFT=DFT

Sugra B.G.のSSMトレースアノマリー

26次元のbosonic string sigma modelのEMTのトレースは

$$< T >= \frac{1}{2\alpha'}(\beta^G_{mn}\gamma^{ab} - \beta^B_{mn}\varepsilon^{ab})\partial_a X^m \partial_b X^n$$

なお、

$$\beta^G_{mn} = \alpha'\left(R_{mn} - \frac{1}{4}H_{mpq}H_n{}^{pq}\right) \qquad \beta^B_{mn} = \alpha'\left(-\frac{1}{2}\nabla^k H_{kmn}\right)$$

である。FT項のトレースへの寄与は、

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-\gamma}}\gamma^{ab}\frac{\delta S_{FT}}{\delta\gamma^{ab}} = \left(\nabla_m\nabla_n\Phi\gamma^{ab} - \frac{1}{2}\partial_k\Phi H^k{}_{mn}\varepsilon^{ab}\right)\partial_a X^m\partial_b X + D^m\Phi\boxed{\frac{2\pi\alpha'}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta S}{\delta X^m}}$$

X^mのEoM $= 0$

これはSugra Eq.

$$R_{ij} - \frac{1}{4}H_i^{pq}H_{jpq} + 2\nabla_i\nabla_j\phi = 0 \;, \frac{1}{2}\nabla^p H_{pij} - H_{pij}\nabla^p\phi = 0$$

を使うことで相殺できる。

つまり、

$$\beta^G_{mn} = -\alpha'(2\nabla_m\nabla_n\Phi),\ \ \beta^B_{mn} = -\alpha'\partial^k H_{kmn}$$

となっていればアノマリーは打ち消せる。

これはSugraの方程式、

$$R_{ij} - \frac{1}{4}H_i^{pq}H_{jpq} + 2\nabla_i\nabla_j\phi = 0$$

$$\frac{1}{2}\nabla^p H_{pij} - H_{pij}\nabla^p\phi = 0$$

と一致している。

5.Weylアノマリーの相殺

前項のように、ディラトンをシフトさせるとどうなるか？
というわけでFT項のディラトンΦにwinding依存性を持たせると、
EMTのS_{FT}からの寄与は、

$$\frac{4\pi}{\sqrt{-\gamma}}\gamma^{ab}\frac{\delta S_{FT}^{W_*}}{\delta\gamma^{ab}} = \frac{1}{2}[\boxed{2D_{(m}Z_{n)}}\gamma^{ab} - \boxed{(Z^k H_{kmn} + 2\partial_{[m}I_{n]})}\varepsilon^{ab}]\partial_a X^m \partial_b X^n$$

$$+Z^m \underbrace{\boxed{\frac{2\pi\alpha'}{\sqrt{-\gamma}}\frac{\delta S}{\delta X^m}}}_{X^m\text{のEoM}=0} + I^i \mathcal{D}^a (\underbrace{\boxed{\partial_a \tilde{Y}_i - G_{in}\varepsilon_a^b \partial_b X^n - B_{in}\partial_a X^n}}_{\text{自己双対関係}})$$

黄色枠の部分がシグマモデルのトレースアノマリーと合わさると、
GSEの形になっている。逆に言えばGSEを使うとアノマリーは相殺。
つまりGSE BackgroundであってもディラトンのWinding依存を認めればWeylアノマリーは相殺できる。

自己双対関係

自己双対関係を見るためにHullのDSMを用いる.

$$S=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int\left[\frac{1}{2}\mathcal{H}_{MN}(X)\mathcal{P}^M\wedge *_\gamma\mathcal{P}^N-(d\tilde{X}_m+C_m)\wedge dX^m\right]$$

$$\mathcal{P}^M(\sigma)\equiv\mathbb{X}^M(\sigma)+C^M(\sigma),\ \ (C^M)=\begin{pmatrix}0\\c_m\end{pmatrix}$$

C_mの運動方程式 $d\tilde{X}_m+C_m=G_{mn}*_\gamma dX^n+B_{mn}dX^n$

よって $dC_i=d(G_{in}*_\gamma dX^n+B_{in}dX^n)=0$

C_iは閉形式、つまり少なくとも局所的に$C_i=0$が取れる。

$$d\tilde{Y}_i(\sigma)=G_{in}*_\gamma dX^n+B_{in}dX^n$$

言い換えると$\partial_a\tilde{Y}_i-G_{in}\varepsilon_a^b\partial_bX^n-B_{in}\partial_aX^n=0$

1.T-duality

WS上の運動

一般化運動量 $\mathcal{P}^I = \begin{pmatrix} \tilde{p}_i \\ p^i \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}_I = \eta_{IJ}\mathcal{P}^J = \begin{pmatrix} 0 & \delta^i_j \\ \delta^j_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_j \\ p^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^i \\ \tilde{p}_i \end{pmatrix}$

一般化計量 $\mathcal{H}_{IJ} = \begin{pmatrix} G^{ij} & -G^{ik}B_{kj} \\ B_{ik}G^{kj} & G_{ij} - B_{ik}G^{kl}B_{lj} \end{pmatrix}$

ハミルトニアンは$\mathcal{P}^P\mathcal{H}_{PQ}\mathcal{P}^Q$ の項を持つ。これを展開すると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_p & p^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{pq} & -G^{pk}B_{kq} \\ B_{pk}G^{kq} & G_{pq} - B_{pk}G^{kl}B_{lq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_q \\ p^q \end{pmatrix}$$

$$= G^{pq}\tilde{p}_p\tilde{p}_q + G_{pq}p^p p^q - B_{pk}G^{kl}B_{lq}p^p p^q - 2G^{pk}B_{kq}\tilde{p}_p p^q$$

2.DFT [Review]G.Aldazabal, D Marques, C.Nunes arXiv:1305.1907

Lie微分の二重化：一般化Lie微分
B場のゲージ変換をdual方向のdiffeoとして解釈する。
ゲージパラメーターとして $\xi^M = (\tilde{\lambda}_i, \lambda^i)$ を用いて、

$$\mathcal{L}_\xi V^M = \xi^P \partial_P V^M + (\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^M) V^P$$

と定義する。例えば、

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{H}_{MN} = \xi^P \partial_P \mathcal{H}_{MN} - \partial^P \xi_M \mathcal{H}_{PN} - \partial^P \xi_N \mathcal{H}_{MP} + \partial_M \xi^P \mathcal{H}_{PN} + \partial_N \xi^P \mathcal{H}_{MP}$$

左上成分G^{mn}は、

$$\lambda^p(\partial_p G^{mn}) - (\partial_p \lambda^m) G^{pn} - G^{mp}(\partial_p \lambda^n) = L_\lambda G^{mn}$$