

THREE DIMENSIONAL VIEW OF THE SYK/ADS DUALITY

Sumit R. Das, Antal Jevicki, Kenta Suzuki

arXiv:1704. 07208v1[hep-th]

文献紹介 6月2日（金） 伊敷

SYK model

- ◆ Large-Nで可解な量子力学系であり、双対な重力理論があると期待されている

$$H = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l=1}^N J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ijkl} : \text{ガウス分布 (幅 } J \text{) に従う乱数} \\ \chi_i : \{ \chi_i, \chi_j \} = \delta_{ij} \text{ を満たす変数} \end{array} \right.$$

- ・ 強結合極限で共形対称性がある $\Rightarrow$ AdS₂/CFT₁?
- ・ リアプノフ指数が最大 $\Rightarrow$ 有限温度ではブラックホールの熱力学を記述?

双対な重力理論？

◆ 2次元のアインシュタイン作用は自明な理論になってしまう ($T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = 0$)

◆ ディラトン重力理論

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \left[\int d^2x \phi \sqrt{g} (R + 2) + 2 \int_{bdy} \phi_b K \right] + S_{matter}$$

は自明ではなく、 ϕ の運動方程式からAdS空間を古典解に持つことが分かる

◆ SYK模型に対応する理論は、このディラトン重力理論だと考えられている
[Maldacena-Stanford-Yang, Jensen]

対称性について

- ◆ 一般に AdS_2 という空間は境界で1次元の共形対称性（reparametrization）を持つが、ディラトン重力理論の場合、境界項がこの対称性を破る [Maldacena-Stanford-Yang]

$$\int_b \phi_b K = \int du \phi(u) Sch(t, u)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t, z : AdS_2 \text{ のポアンカレ座標} \\ (t(u), z(u)) : \text{境界を表す曲線} \\ Sch(t, u) = -\frac{1}{2} \frac{(t'')^2}{(t')^2} + \left(\frac{t''}{t'} \right)' \end{array} \right.$$

- ◆ シュワルツ微分は $SL(2)$ （グローバル変換）の対称性を持つ

$$Sch((at + b)/(ct + d), u) = Sch(t, u)$$

SYK模型との関係

- ◆ SYK模型は強結合領域で1次元共形対称性を持つが、ゲージ固定をすると付随するゴーストの作用がちょうどシュワルツ微分の形で現れる ($SL(2)$ 対称性)
- ◆ この対称性のパターンが一致していることは、SYK模型がディラトン重力理論に対応していることを示唆している
- ◆ しかし、この議論だけでは重力理論をユニークに決めることはできない

Matterは何か？ ディラトンは実はLiouville理論になっている？
[Mandal-Nayak-Wadia]

- ◆ 今回紹介する論文では、SYKと重力側のプロパゲータの対応を調べ、「重力側は2次元ではなく、3次元の理論ではないか」と主張している

SYK模型の解析

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \chi_i \partial_t \chi_i - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} J_{ijkl} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l$$

$$\begin{aligned} Z &= \int D J_{ijkl} e^{-\frac{N^3 J_{ijkl}^2}{12 J^2}} \int D \chi_i e^{-\int dt L} \\ &= \int D \chi_i e^{\frac{1}{2} \int dt \chi_i \partial_t \chi_i + \frac{J^2}{8 N^3} \int dt_1 \int dt_2 (\chi_i(t_1) \chi_i(t_2))^4} \end{aligned}$$

ここで、以下のようなbilocal collective fieldを導入する

$$\Psi(t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \chi_i(t_1) \chi_i(t_2)$$

Large-Nでのcollective fieldの作用

$$Z_{\text{col}} = \int D\Psi e^{-S_{\text{col}}}$$

$$ds^2 = e^2 dt^2$$

$$A \cdot B(t, t') = \int dt'' e(t'') A(t, t'') B(t'', t')$$

$$S_{\text{col}} = \frac{N}{2} \int dt \partial_t \Psi(t, t')|_{t=t'} - \frac{J^2 N}{8} \int dt_1 \int dt_2 \Psi(t_1, t_2)^4 + \underbrace{\frac{N}{2} \text{Tr} \log \Psi}_{\text{ヤコビアンに対応}}$$

◆ この作用を考えると、large-Nで任意の関数Fに対して以下が成立する

$$\langle F(\sum_i \chi_i(t) \chi_i(t')/N) \rangle_Z = \langle F(\Psi(t, t')) \rangle_{Z_{\text{col}}}$$

◆ ヤコビアンは上の等式を課して、Schwinger-Dyson方程式から導出できる

$$\Psi \cdot \frac{\delta J}{\delta \Psi} = -\frac{N}{2} \mathbf{1} \quad \longrightarrow \quad \log J = -\frac{N}{2} \text{Tr} \log \Psi$$

強結合(IR)極限を考える

$$S_{\text{col}} \rightarrow -\frac{J^2 N}{8} \int dt_1 \int dt_2 \Psi^4(t_1, t_2) + \frac{N}{2} \text{Tr} \log \Psi$$

この理論には 1 次元共形(reparametrization)対称性がある

$$\Psi(t_1, t_2) \rightarrow |f'(t_1)f'(t_2)|^{1/4} \Psi(f(t_1), f(t_2))$$

Fadeev-Popovの方法によってghostを導入すると、ゴーストの作用がシュワルツ微分で書ける

$$S[f] = -\frac{N\alpha}{24\pi J} \int dt \left[\frac{f'''(t)}{f'(t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(t)}{f'(t)} \right)^2 \right]$$

古典解まわりでの解析

◆ 強結合極限($J \rightarrow \infty$)での古典解

$$\Psi_0(t_1, t_2) = \left(\frac{1}{4\pi J^2} \right)^{1/4} \frac{\text{sign}(t_1 - t_2)}{\sqrt{|t_1 - t_2|}}$$

◆ 上の古典解の周りで展開

$$\Psi(t_1, t_2) = \Psi_0(t_1, t_2) + \sqrt{\frac{2}{N}} \Phi(t, z)$$

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) \quad z = \frac{1}{2}(t_1 - t_2)$$

Cf. [Das-Jevicki]

O(N) vector modelとHigher spin
理論の対応では、(t,z)はAdSの
ポアンカレ座標と同定されていた。

◆ 揺らぎの2次までの作用 $S \sim \Phi D\Phi$ に現れる演算子のグリーン関数を求める [Polchinski-Rosenhaus]

$$DG(t, z; t', z') = \delta(t - t')\delta(z - z')$$



$$G(t, z; t', z') = \frac{16\pi^{3/2}}{3J} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{m=1}^{\infty} R(p_m) \frac{u_{p_m\omega}^*(t, z) u_{p_m\omega}(t', z')}{N_{p_m}}$$

ここで p_m は以下の方程式の解

$$\frac{2p_m}{3} = -\tan\left(\frac{\pi p_m}{2}\right) \quad 2m + 1 < p_m < 2m + 2 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$R, N_{p_m}, u_{p_m\omega}$ は以下で定義される

$$R(x) = \frac{3x^2}{(x^2 + 9/4)(\pi x - \sin(\pi x))} \quad N_{p_m} = \frac{1}{2p_m} \quad u_{\nu\omega}(t, z) = \text{sgn}(z)e^{i\omega t} \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ベッセル関数}}}{J_{\nu}(|\omega z|)} + \frac{\tan(\pi\nu/2) + 1}{\tan(\pi\nu/2) - 1} J_{-\nu}(|\omega z|) \right]$$

p_m はプロパゲータの運動量空間でのポールになっていて、その周りの作用を考えると、以下のAdS₂上のスカラー場の作用と等しくなっている

$$S \sim \Phi D\Phi \underset{\substack{\uparrow \\ p_m \text{ 周り}}}{\sim} \frac{1}{2} \int \sqrt{g} d^2x \left[-g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi_m \partial_\nu \Phi_m - \left(p_m^2 - \frac{1}{4} \right) \Phi_m^2 \right]$$

Bilocal場＝AdS₂空間上のスカラー場のタワーと見なせる？

KKタワーとして p_m を出すような3次元空間（AdS₂×M₁）があれば丁度良いかもしれない

3次元の重力理論を考える

- ◆ 3次元重力の次元簡約 → 2次元重力+ディラトン+...
- ◆ 2Dディラトン重力のAdS₂解は、3次元のBTZ black holeのnear horizon極限の次元簡約になっている

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(-dt^2 + dz^2) + \underbrace{\left(1 + \frac{a}{z}\right)^2}_{\text{ディラトンに対応}} dy^2 \quad a \sim 1/J$$

- ◆ y 方向を S^1/Z_2 でコンパクト化 $y < L$
- ◆ 3次元でスカラー場を考える

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \sqrt{-g} \left[-g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - m_0^2 \Phi^2 - V \delta(y) \Phi^2 \right] \quad \text{Dirichlet条件を課す}$$

◆ 以下では $(L, V, m_0^2) = (\pi/2, 3, -1/4)$ とする。⇒ KKタワーのmassがちょうど

と一致する

◆ $a \sim 1/J \rightarrow 0$ の極限で、作用 $S \sim \Phi D_0 \Phi$ に現れる演算子のグリーン関数を考える

$$D_0 G(t, z, y; t', z', y') = \delta(t - t') \delta(z - z') \delta(y - y')$$

◆ グリーン関数の $y = y' = 0$ と置いたものを求めてみると

$$G(t, z, 0; t', z', 0) = \frac{1}{6} |zz'|^{1/2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega R(p_m) \frac{u_{p_m \omega}^*(t, z) u_{p_m \omega}(t', z')}{N_{p_m}}$$

となつて、SYKのbilocal場のグリーン関数と全く同じ構造のものが得られる
さらにこの論文では、運動量空間のポールの位置が互いに一致することや、
 $a \sim 1/J$ の1次の補正を入れても、このような一致が見られることを確認している

まとめ

- SYK模型のbilocal場を使った記述を考え、プロパゲータを求めた
- $\text{AdS}_2 \times S^1/\mathbb{Z}_2$ 上のスカラー場のプロパゲータ($y=y'=0$)も全く同じ構造をしていた
さらに運動量空間のポールの位置も互いに一致する
- SYK模型に対応するのは3次元重力理論なのか？もう少し理解が必要？
- 揺らぎの高次は？SYKのbilocal場と3次元スカラー場の間の直接的な関係は？
非線形？[Ostrogradsky]

$$L = \sum_{n=1}^N \phi_n D_n \phi_n$$

$$\phi = \sum_{n=1}^N \phi_n \quad \chi_n \quad (n = 1, \dots, N-1)$$

$$\hat{D} = \frac{\prod_{n=1}^N D_n}{\sum_{n_1 < \dots < n_{N-1}} D_{n_1} D_{n_2} \cdots D_{n_{N-1}}}$$

$$\hat{D}_p = \frac{\sum_{n_1 < \dots < n_p} D_{n_1} D_{n_2} \cdots D_{n_p}}{\sum_{n_1 < \dots < n_{p-1}} D_{n_1} D_{n_2} \cdots D_{n_{p-1}}}$$

$$L = \phi \hat{D} \phi + \sum_{n=1}^{N-1} \chi_n \hat{D}_n \phi_n$$

$$\rightarrow \phi \left(\frac{\prod_{n=1}^N D_n}{\sum_{n_1 < \dots < n_{N-1}} D_{n_1} D_{n_2} \cdots D_{n_{N-1}}} \right) \phi$$