

# On Lattice Calculation of Electric Dipole Moments and Form Factors of the Nucleon

M. Abramcyky, S. Aoki, T. Blum, T. Izubuchi, H. Ohki, S. Syritsyn

arXiv:1701.07792 [hep-lat]

1. lattice QCD の Neutron electric dipole moment (NEDM) 定義再考
2. NEDM lattice QCD 計算: 形状因子、エネルギーシフト
3. これまでの結果の考察

# Strong CP problem

強い相互作用では CP 対称性は非常に良く成り立っている

一方、CP 対称性が無ければ、グルーオン場で書かれる  $\theta \frac{\alpha_s}{32\pi^2} \text{Tr} [F \tilde{F}]$  という質量次元4、CP-odd の項 ( $\theta$  項) が作用密度に許される

⇒ 何故、現実世界では  $\theta$  が非常に小さいのか? : Strong CP problem  
c.f.) Peccei-Quinn 対称性

実験: 現実世界でどのくらい CP 対称性が破れているかを測る

Neutron electric dipole moment (NEDM) :  $|d_n| \leq 3 \times 10^{-13} e \cdot \text{fm}$

理論: lattice QCD 計算で  $d_n = \frac{F_3(0)}{2m_N} = \frac{\hat{F}_3(0)\theta}{2m_N}$  を求め、  
 $\theta$  に制限をつける :  $|\theta| \lesssim 7 \times 10^{-11}$

Guo *et al.*(QCDSF), PRL115:062001(2015)

この論文は lattice QCD を用いた  $F_3(0)$  計算 (方法) について

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (1)

CP 対称性が破れている場合、核子質量に位相  $\alpha_5(\theta)$  が現れる

核子場の運動方程式

$$(\not{\partial} + m_N e^{-2i\alpha_5\gamma_5})N(x) = 0$$

spinor( $\langle 0|N|p, \sigma\rangle_{\text{CP}} = Z_N \tilde{u}_{p,\sigma}$ ) の運動方程式

$$(i\not{p} + m_N e^{-2i\alpha_5\gamma_5})\tilde{u}_{p,\sigma} = \tilde{u}_{p,\sigma}(i\not{p} + m_N e^{-2i\alpha_5\gamma_5}) = 0$$

カイラル回転した spinor は

$$\tilde{u}_{p,\sigma} = e^{i\alpha_5\gamma_5} u_{p,\sigma}, \quad \tilde{\bar{u}}_{p,\sigma} = \bar{u}_{p,\sigma} e^{i\alpha_5\gamma_5}$$

CP 対称性がある場合の運動方程式を満たす

$$(i\not{p} + m_N)u_{p,\sigma} = \bar{u}_{p,\sigma}(i\not{p} + m_N) = 0$$

spin sum

$$\sum_{\sigma} \tilde{u}_{p,\sigma} \tilde{\bar{u}}_{p,\sigma} = e^{i\alpha_5\gamma_5} \left( \sum_{\sigma} u_{p,\sigma} \bar{u}_{p,\sigma} \right) e^{i\alpha_5\gamma_5} = e^{i\alpha_5\gamma_5} (-i\not{p} + m_N) e^{i\alpha_5\gamma_5}$$

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (2)

CP 対称性が破れている場合、相関関数に位相が現れる

核子 2 点相関関数  $t \gg 1$

$$\begin{aligned}\langle 0|N(\vec{p}, t)\bar{N}(0)|0\rangle_{\mathcal{CP}} &\propto \sum_{\sigma} \langle 0|N|p, \sigma\rangle_{\mathcal{CP}} \mathcal{CP} \langle p, \sigma|N|0\rangle \\ &\propto \sum_{\sigma} \tilde{u}_{p, \sigma} \tilde{\bar{u}}_{p, \sigma} = e^{i\alpha_{5\gamma 5}} (-i\not{p} + m_N) e^{i\alpha_{5\gamma 5}}\end{aligned}$$

核子 3 点相関関数  $T - t_J, t_J \gg 1$

$$\begin{aligned}\langle 0|N(\vec{p}', T)J_{\mu}(\vec{q}, t_J)\bar{N}(0)|0\rangle_{\mathcal{CP}} &\propto \sum_{\sigma', \sigma} \tilde{u}_{p', \sigma'} \left[ \langle p', \sigma'|J_{\mu}|p, \sigma\rangle_{\mathcal{CP}} \right] \tilde{\bar{u}}_{p, \sigma} \\ &\propto e^{i\alpha_{5\gamma 5}} u_{p', \sigma'} \left[ \langle p', \sigma'|J_{\mu}|p, \sigma\rangle_{\mathcal{CP}} \right] \bar{u}_{p, \sigma} e^{i\alpha_{5\gamma 5}} \\ J_{\mu} &= \sum_{f=u, d} e_f \bar{q}_f \gamma_{\mu} q_f, q = p' - p\end{aligned}$$

$\langle p', \sigma'|J_{\mu}|p, \sigma\rangle_{\mathcal{CP}}$  に NEDM の情報が入っている

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (3)

CP 対称性が破れている場合の neutron electromagnetic matrix element

Quantum Field Theory, Itzykson and Zuber, p.160

$$\langle p', \sigma' | J_\mu | p, \sigma \rangle_{\mathcal{CP}} = \bar{u}_{p', \sigma'} \left[ F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \frac{i \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} - F_3(q^2) \frac{\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} + F_A(q^2) \frac{(q q_\mu - \gamma_\mu q^2) \gamma_5}{m_N^2} \right] u_{p, \sigma}$$

CP-even:  $F_1(q^2), F_2(q^2)$  の項

$$J_\mu = \sum_{f=u,d} e_f \bar{q}_f \gamma_\mu q_f, q_\nu = p'_\nu - p_\nu, \sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$$

CP-odd:  $F_3(q^2), F_A(q^2)$  の項

中性子電荷  $F_1(0) = 0$

NMDM\*  $F_2(0)/2m_N \sim -1.5/2m_N$

NEDM  $F_3(0)/2m_N = d_n$

\*neutron magnetic dipole moment

$F_A(q^2)$ : anapole form factor → 以降の話に関係ない

この論文ではこの定義を採用

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (3)

CP 対称性が破れている場合の neutron electromagnetic matrix element

Quantum Field Theory, Itzykson and Zuber, p.160

$$\langle p', \sigma' | J_\mu | p, \sigma \rangle_{\mathcal{CP}} = \bar{u}_{p', \sigma'} \left[ F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} - F_3(q^2) \frac{\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} + F_A(q^2) \frac{(q q_\mu - \gamma_\mu q^2) \gamma_5}{m_N^2} \right] u_{p, \sigma}$$

CP-even:  $F_1(q^2), F_2(q^2)$  の項

$$J_\mu = \sum_{f=u,d} e_f \bar{q}_f \gamma_\mu q_f, \quad q_\nu = p'_\nu - p_\nu, \quad \sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$$

CP-odd:  $F_3(q^2), F_A(q^2)$  の項

中性子電荷  $F_1(0) = 0$

NMDM\*  $F_2(0)/2m_N \sim -1.5/2m_N$

NEDM  $F_3(0)/2m_N = d_n$

\*neutron magnetic dipole moment

$F_A(q^2)$ : anapole form factor → 以降の話に関係ない

この論文ではこの定義を採用 ← これまでの計算とは異なる

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (4)

これまでの計算で使われた

CP 対称性が破れている場合の neutron electromagnetic matrix element

$$\langle p', \sigma' | J_\mu | p, \sigma \rangle_{\text{CP}} = \tilde{u}_{p', \sigma'} \left[ F_1(q^2) \gamma_\mu + \tilde{F}_2(q^2) \frac{i\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} - \tilde{F}_3(q^2) \frac{\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} + F_A(q^2) \frac{(q q_\mu - \gamma_\mu q^2) \gamma_5}{m_N^2} \right] \tilde{u}_{p, \sigma}$$

前のページの  $F_2(q^2)$ ,  $F_3(q^2)$  との関係

$$F_2(q^2) = \cos(2\alpha_5) \tilde{F}_2(q^2) - \sin(2\alpha_5) \tilde{F}_3(q^2)$$

$$F_3(q^2) = \cos(2\alpha_5) \tilde{F}_3(q^2) + \sin(2\alpha_5) \tilde{F}_2(q^2)$$

$\alpha_5$ ,  $\tilde{F}_3(q^2)$  を微小量とすると

$$F_3(q^2) = \tilde{F}_3(q^2) + 2\alpha_5 \tilde{F}_2(q^2), \quad F_2(q^2) = \tilde{F}_2(q^2)$$

これまでの形状因子を用いた  $F_3(0) = \tilde{F}_3(0)$  計算には  $-2\alpha_5 F_2(0)$  が含まれている

## 形状因子による NEDM lattice QCD 計算 (4)

これまでの計算で使われた

CP 対称性が破れている場合の neutron electromagnetic matrix element

$$\langle p', \sigma' | J_\mu | p, \sigma \rangle_{\text{CP}} = \tilde{u}_{p', \sigma'} \left[ F_1(q^2) \gamma_\mu + \tilde{F}_2(q^2) \frac{i\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} - \tilde{F}_3(q^2) \frac{\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} + F_A(q^2) \frac{(q q_\mu - \gamma_\mu q^2) \gamma_5}{m_N^2} \right] \tilde{u}_{p, \sigma}$$

前のページの  $F_2(q^2)$ ,  $F_3(q^2)$  との関係

$$F_2(q^2) = \cos(2\alpha_5) \tilde{F}_2(q^2) - \sin(2\alpha_5) \tilde{F}_3(q^2)$$

$$F_3(q^2) = \cos(2\alpha_5) \tilde{F}_3(q^2) + \sin(2\alpha_5) \tilde{F}_2(q^2)$$

$\alpha_5$ ,  $\tilde{F}_3(q^2)$  を微小量とすると

$$F_3(q^2) = \tilde{F}_3(q^2) + 2\alpha_5 \tilde{F}_2(q^2), \quad F_2(q^2) = \tilde{F}_2(q^2)$$

これまでの形状因子を用いた  $F_3(0) = \tilde{F}_3(0)$  計算には  $-2\alpha_5 F_2(0)$  が含まれている

詳細は省くが、

静電場をかけたエネルギーシフトから NEDM を求める場合にはこの問題は無いことも論文では示している



# シミュレーションパラメータ

## $N_f = 2 + 1$ Iwasaki gauge + Domain wall fermion actions

Table I: Lattice ensembles on which the simulations were performed. Both ensembles use Iwasaki gauge action and  $N_f = 2 + 1$  domain wall fermions. The statistics are shown for “sloppy” (low-precision) samples. The nucleon masses were extracted using 2-state fits. For the background electric field method, we quote the quantum of the electric field  $\mathcal{E}_0 = \frac{6\pi}{a^2 L_t L_x}$ .

$L_x^3 \times L_t \times L_5$	$a$ [fm]	$am_l$	$am_s$	$m_\pi$ [MeV]	$m_N$ [GeV]	$\mathcal{E}_0$ [GeV <sup>2</sup> ]	conf	stat	$N_{ev}$	$N_{ev}^{\mathcal{E}=1,2}$	$N_{CG}$
$16^3 \times 32 \times 16$	0.114(2)	0.01	0.032	422(7)	1.250(28)	0.110	500	16000	200	150	100
$24^3 \times 64 \times 16$	0.1105(6)	0.005	0.04	340(2)	1.178(10)	0.0388	100	3200	200	200	200

## $F_3(0)$ 形状因子計算と電場を入れたエネルギーシフト計算 (説明省略)

正しい計算をすれば2つの結果は一致するはず

## CP-odd 演算子: Chromo-electric dipole moment (質量次元5)

$$\mathcal{O}_{\mathcal{CP}} = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{f=u,d} \bar{q}_f(x) F_{\mu\nu}(x) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q_f(x)$$

質量次元4の $\theta$ 項よりも大きな $\alpha_5$ が出てくるので $F_3$ の検証に好都合

作用:  $S_{\text{QCD}} + i c_{\psi G} \mathcal{O}_{\mathcal{CP}}$

計算方針:  $c_{\psi G}$ ,  $\alpha_5 = \hat{\alpha}_5 c_{\psi G}$ ,  $F_3(q^2) = \hat{F}_3(q^2) c_{\psi G}$  を微小量として展開する

disconnected loopは無視

## CP対称性の破れた2点相関関数

$$\begin{aligned}
 \langle 0|N(\vec{p}, t)\bar{N}(0)|0\rangle_{\text{CP}} &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S - i c_{\psi G} \mathcal{O}_{\text{CP}}} [N(\vec{p}, t)\bar{N}(0)] \\
 &\sim \langle 0|N(\vec{p}, t)\bar{N}(0)|0\rangle - i c_{\psi G} \langle 0|N(\vec{p}, t)\bar{N}(0)\mathcal{O}_{\text{CP}}|0\rangle \\
 &\xrightarrow{\vec{p}=0, t \gg 1} Z_N^2 \left[ \frac{1 + \gamma_4}{2} + i \alpha_5 \gamma_5 \right] e^{-E_N t}
 \end{aligned}$$

$\hat{\alpha}_5 = \alpha_5 / c_{\psi G}$  の決定:  $c_{\psi G}$  1 次の係数

$$- \frac{\text{Tr} \left[ P_+ \gamma_5 \langle 0|N(\vec{0}, t)\bar{N}(0)\mathcal{O}_{\text{CP}}|0\rangle \right]}{\text{Tr} \left[ P_+ \langle 0|N(\vec{0}, t)\bar{N}(0)|0\rangle \right]} \xrightarrow{t \gg 1} \hat{\alpha}_5$$

$$P_+ = \frac{1 + \gamma_4}{2}$$

# CP対称性の破れた2点相関関数

陽子相関関数から求めた  $\hat{\alpha}_5 (= \alpha_5 [論文では  $c_{\psi G} = 1$  としてプロット])$

U :  $\mathcal{O}_{CP}$  の  $u$  クォークの寄与, D :  $d$  クォークの寄与

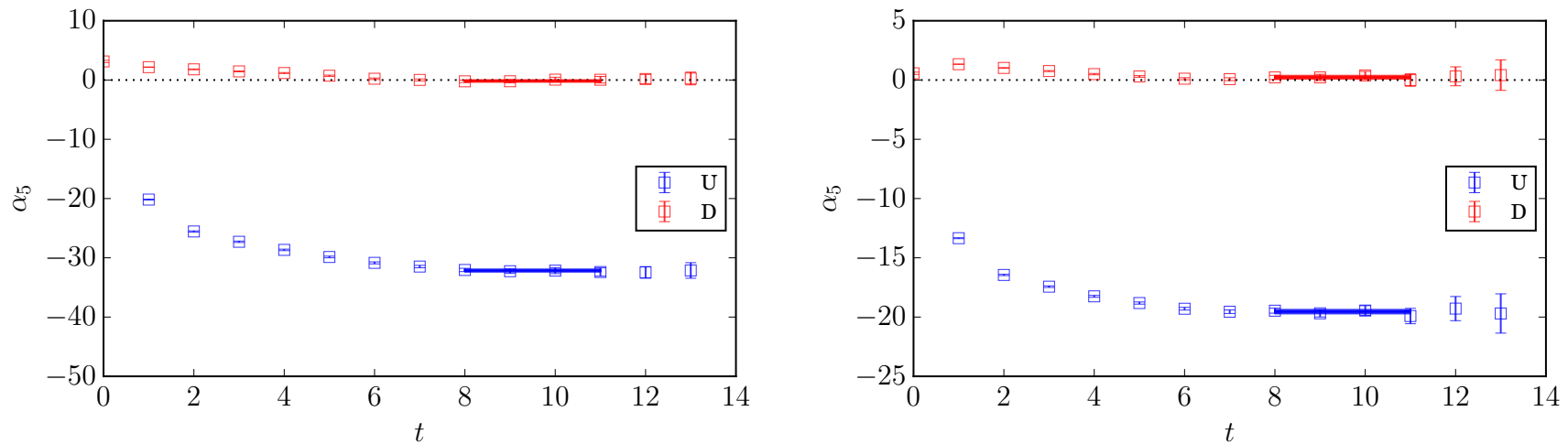


Figure 10: Chiral rotation angle  $\alpha_5$  of the proton field induced by  $u$ - and  $d$ -quark cEDM interactions, on the  $24^3 \times 64$  (left) and  $16^3 \times 32$  (right) lattices. The angles  $\alpha_5$  for the neutron are related by the  $SU(2)_f$  symmetry  $u \leftrightarrow d$ . The chromo-EDM interactions are not renormalized and may include mixing with other operators.

中性子の  $\hat{\alpha}_5$  は陽子の  $\hat{\alpha}_5$  を  $U \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow U$  とすれば求められる

中性子の  $\hat{\alpha}_5$  は U がほぼゼロ、D が絶対値でかなり大きい

## CP対称性の破れた3点相関関数

$$\begin{aligned}
 & \langle 0 | N(\vec{p}', T) J_\mu(\vec{q}, t_J) \bar{N}(0) | 0 \rangle_{\mathcal{CP}} \\
 &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S - i c_\psi G} \mathcal{O}_{\mathcal{CP}} [N(\vec{p}', T) J_\mu(\vec{q}, t_J) \bar{N}(0)] \\
 &\sim \langle 0 | N(\vec{p}', T) J_\mu(\vec{q}, t_J) \bar{N}(0) | 0 \rangle - i c_\psi G \langle 0 | N(\vec{p}', T) J_\mu(\vec{q}, t_J) \bar{N}(0) \mathcal{O}_{\mathcal{CP}} | 0 \rangle \\
 &\propto (1 + i \alpha_5 \gamma_5) \frac{-i \not{p}' + m_N}{2E'_N} F_\mu(q) \frac{-i \not{p} + m_N}{2E_N} (1 + i \alpha_5 \gamma_5) \\
 & \qquad \qquad \qquad E_N^{(l)} = \sqrt{m_N^2 + (p^{(l)})^2}, (T - t_J, t_J \gg 1) \\
 & F_\mu(q) = F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \frac{i \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} - F_3(q^2) \frac{\gamma_5 \sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_N} \quad (F_A(q^2) \text{は無視})
 \end{aligned}$$

$\hat{F}_3(q^2) = F_3(q^2)/c_\psi G$  の決定:  $c_\psi G$  1次の係数

$$\begin{aligned}
 (1 + \tau) \hat{F}_3(q^2) &= \mathcal{N} \text{Tr} \left[ P_{z+} \langle 0 | N(\vec{p}', T) J_4(\vec{q}, t_J) \bar{N}(0) \mathcal{O}_{\mathcal{CP}} | 0 \rangle \right] - \hat{\alpha}_5 G_E(q^2) \\
 \tau &= \frac{q^2}{4m_N^2}, P_{z+} = \frac{1 + \gamma_4}{2} [-i \gamma_1 \gamma_2], G_E(q^2) = F_1(q^2) - \tau F_2(q^2) \\
 & \qquad \qquad \qquad \mathcal{N} \text{ は } E_N, m_N, q, 2 \text{ 点関数の比で決まる定数}
 \end{aligned}$$

# CP対称性の破れた3点相関関数

$\hat{F}_3(q^2)(= F_3(q^2)[c_{\psi G} = 1])$  と  $q^2 \rightarrow 0$  外挿

U :  $\mathcal{O}_{CP}$  の  $u$  クォークの寄与, D :  $d$  クォークの寄与

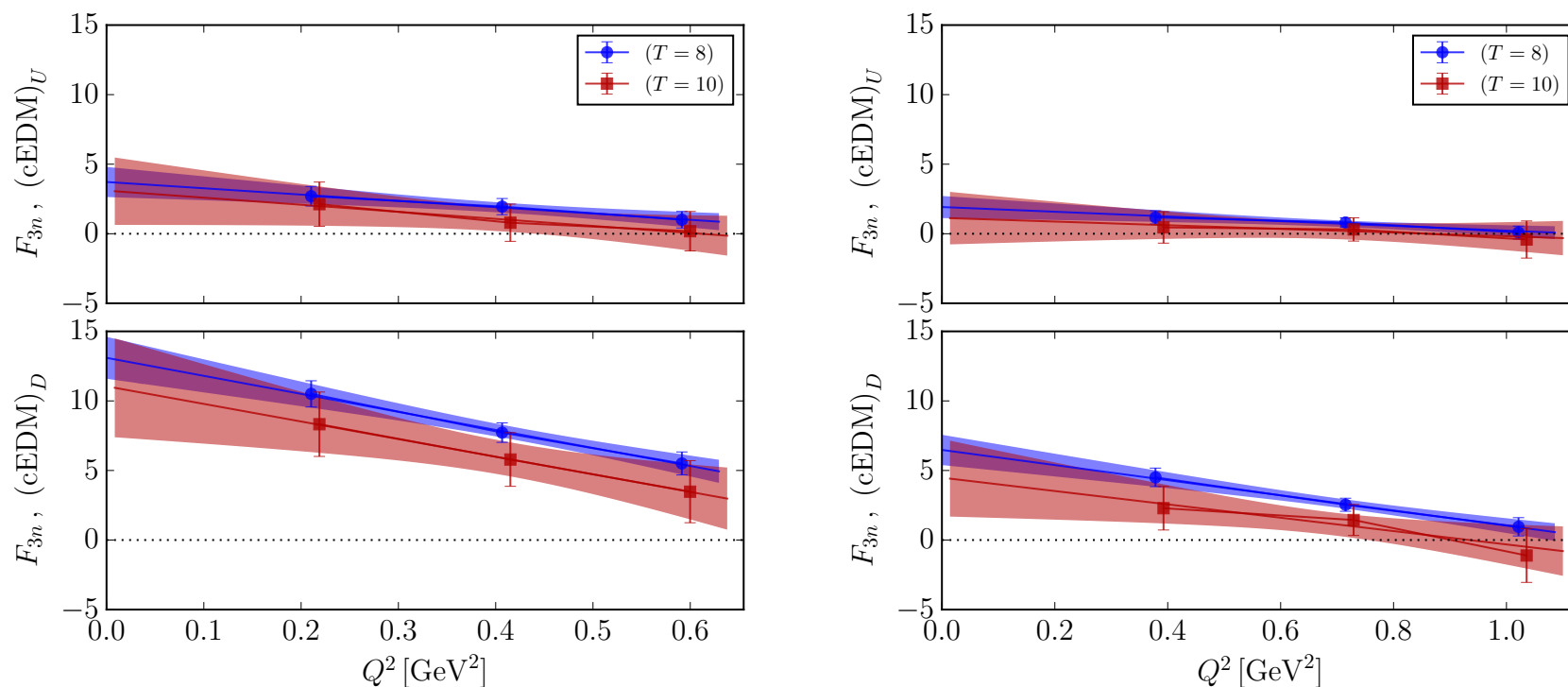


Figure 12: Linear  $Q^2$  fits to the neutron EDFF  $F_3$  (same data as in Fig. 11) including only the three smallest  $Q^2 > 0$  points and source-sink separations  $T = 8a, 10a$ . Results for the  $24^3 \times 64$  (left) and  $16^3 \times 32$  (right) lattices.

$\hat{F}_3(q^2)$  はUよりDが大きい ( $\hat{\alpha}_5$  と似た傾向)

良い精度で  $\hat{F}_3(0)$  が計算できている

## 2つの $\hat{F}_3(0)$ 計算の比較

$\varepsilon/\varepsilon_0 = \pm 1, \pm 2$ : 静電場を用いたエネルギーシフト計算

OLD:  $F_3 = \hat{F}_3(q^2) = \tilde{F}_3(q^2) - 2\hat{\alpha}_5 F_2(q^2)$

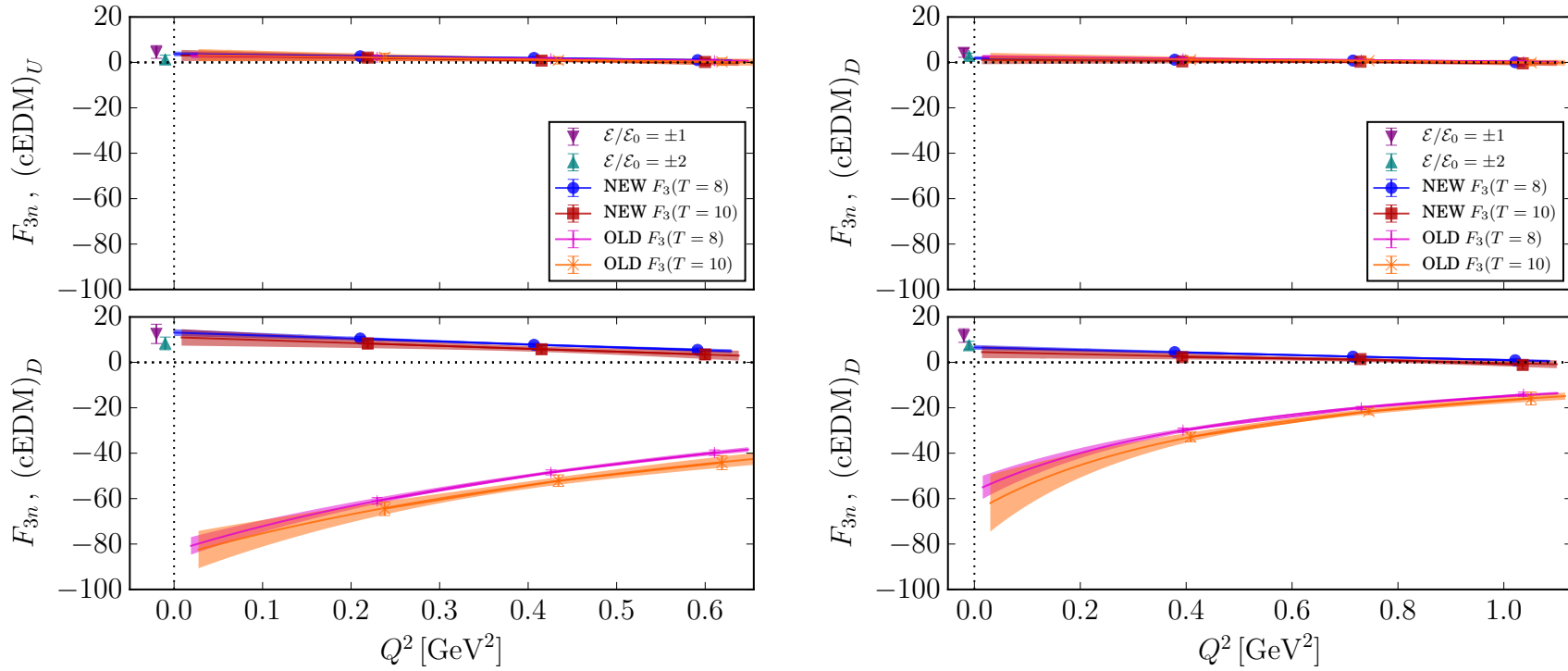


Figure 15: Comparison of the neutron EDFF  $F_{3n}(Q^2)$  computed with the conventional (“OLD”) [5–11] and the “NEW” formula (C12) to the neutron EDM  $\zeta$  computed from the energy shift (see Fig. 14). The “OLD”  $F_{3n}(Q^3)$  data are extrapolated with the dipole fit, and the “NEW” with the linear fit. Data points are shifted horizontally for legibility. Results for the  $24^3 \times 64$  (left) and  $16^3 \times 32$  (right) lattices.

Uは $\hat{\alpha}_5$ がほぼゼロなので、NEW $\approx$ OLD。エネルギーシフトとも一致  
DはNEW $\approx$ エネルギーシフト $\neq$ OLD

$\tilde{F}_3(q^2)$ には大きな $2\alpha_5 F_2(q^2)$ の寄与が含まれる

## これまでの計算結果考察

$$F_3(0) = \tilde{F}_3(0) + 2\alpha F_2(0)$$

	$m_\pi$ [MeV]	$m_N$ [GeV]	$F_2$	$\alpha$	$\tilde{F}_3$	$F_3$
[10] $n$	373	1.216(4)	$-1.50(16)^b$	$-0.217(18)$	$-0.555(74)$	$0.094(74)$
[5] $n$	530	1.334(8)	$-0.560(40)$	$-0.247(17)^a$	$-0.325(68)$	$-0.048(68)$
$p$	530	1.334(8)	$0.399(37)$	$-0.247(17)^a$	$0.284(81)$	$0.087(81)$
[6] $n$	690	1.575(9)	$-1.715(46)$	$-0.070(20)$	$-1.39(1.52)$	$-1.15(1.52)$
$n$	605	1.470(9)	$-1.698(68)$	$-0.160(20)$	$0.60(2.98)$	$1.14(2.98)$
[8] $n$	465	1.246(7)	$-1.491(22)^c$	$-0.079(27)^d$	$-0.375(48)$	$-0.130(76)^d$
$n$	360	1.138(13)	$-1.473(37)^c$	$-0.092(14)^d$	$-0.248(29)$	$0.020(58)^d$

[10] Alexandrou *et al.*, PRD93:074503(2016), [5] Shintani *et al.*, PRD72:014504(2005)

[6] Berruto *et al.*, PRD73:054509(2006), [8] Guo *et al.*, PRL115:062001(2015)

$\tilde{F}_3$  は統計的に有意な値が得られているが、

$F_3$  は統計的にゼロに近い値になる

→ これまで考えていた以上に統計的に難しい計算(かもしれない)

## これまでの計算結果考察

$$F_3(0) = \tilde{F}_3(0) + 2\alpha F_2(0)$$

	$m_\pi$ [MeV]	$m_N$ [GeV]	$F_2$	$\alpha$	$\tilde{F}_3$	$F_3$
[10] $n$	373	1.216(4)	$-1.50(16)^b$	$-0.217(18)$	$-0.555(74)$	$0.094(74)$
[5] $n$	530	1.334(8)	$-0.560(40)$	$-0.247(17)^a$	$-0.325(68)$	$-0.048(68)$
$p$	530	1.334(8)	$0.399(37)$	$-0.247(17)^a$	$0.284(81)$	$0.087(81)$
[6] $n$	690	1.575(9)	$-1.715(46)$	$-0.070(20)$	$-1.39(1.52)$	$-1.15(1.52)$
$n$	605	1.470(9)	$-1.698(68)$	$-0.160(20)$	$0.60(2.98)$	$1.14(2.98)$
[8] $n$	465	1.246(7)	$-1.491(22)^c$	$-0.079(27)^d$	$-0.375(48)$	$-0.130(76)^d$
$n$	360	1.138(13)	$-1.473(37)^c$	$-0.092(14)^d$	$-0.248(29)$	$0.020(58)^d$

[10] Alexandrou *et al.*, PRD93:074503(2016), [5] Shintani *et al.*, PRD72:014504(2005)

[6] Berruto *et al.*, PRD73:054509(2006), [8] Guo *et al.*, PRL115:062001(2015)

$\tilde{F}_3$  は統計的に有意な値が得られているが、

$F_3$  は統計的にゼロに近い値になる

→ これまで考えていた以上に統計的に難しい計算(かもしれない)

これまでに行われた  $\tilde{F}_3$  とエネルギーシフトの比較

$\tilde{F}_{3n}(q^2 = 0.58\text{GeV}^2) = -0.325(68)$ [5]。Shintani *et al.*, PRD75:034507(2007)では、

同じ作用・ $\beta$ 、 $m_N = 2.1\text{GeV}$ でエネルギーシフトから  $F_{3n}(0) = -0.364(170)$  が得られている



## まとめ

1. lattice QCD の Neutron electric dipole moment (NEDM) 定義再考

$$F_3(0) = \tilde{F}_3(0) + 2\alpha F_2(0)$$

2. NEDM lattice QCD 計算: 形状因子、エネルギーシフト

$F_3(0)$  形状因子計算はエネルギーシフトの結果と一致

3. これまでの結果の考察

これまでの計算で  $\tilde{F}_3$  から  $F_3$  を再見積りすると統計的にゼロに近い値

→ これまで考えていた以上に統計的に難しい計算(かもしれない)