

Infinite Chiral Symmetry in Four Dimensions

Christopher Beem, Madalena Lemos, Pedro Liendo, Wolfger Peelaers,
Leonardo Rastelli, and Balt C. van Rees,
Commun.Math.Phys. 336 (2015) 3, 1359-1433 (arxiv: 1312.5344 [hep-th])

Christopher Beem, Leonardo Rastelli, Balt C. van Rees, “ **W symmetry in six dimensions** ”
JHEP 1505 (2015) 017 (arxiv: 1404.1079 [hep-th])

Introduction

- 6次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論

- 超共形場理論の分類によって、その存在が予言されている.

Nahmの定理(1978)

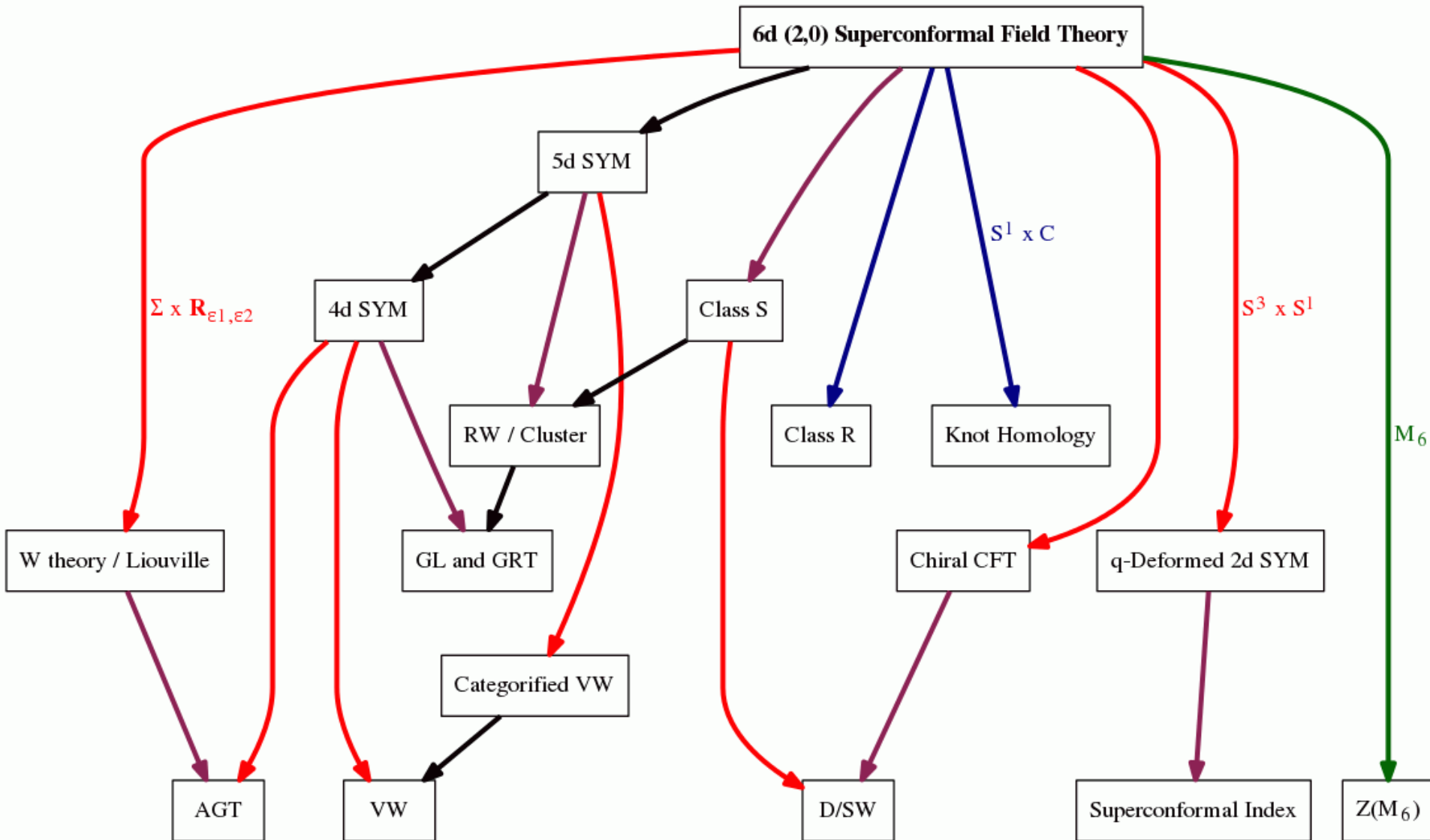
- 様々な理由から、物理学および数学的に重要であると考えられる.

AGT予想, 結び目理論, etc.

- しかし……その正体は未だに **ミステリアス**

ラグランジアン……× 相関関数……×

Introduction



Introduction

- 今回紹介する論文の著者たちは, “ W symmetry in six dimensions ” において, 6次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論に関する次のような発見をした:

6次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論は2次元のカイラル代数を持つ

カイラル代数 $\cdots$ 2次元の共形場理論における無限次元の代数

- 6次元の理論に2次元特有の無限次元の代数が存在するというのは驚くべきこと! また, そのような代数が生成する巨大な対称性は理論の相関関数を強く拘束する.

$\Rightarrow$ 代数的なアプローチによる6次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論の解明

Introduction

- ただし、今回紹介するのは6次元……ではなく4次元の話：

4次元の $\mathcal{N}=2$ 超共形場理論は2次元のカイラル代数を持つ



6次元の $\mathcal{N}=(2,0)$ 超共形場理論は2次元のカイラル代数を持つ

Chiral algebra in 2d

- 2次元の共形場理論において，“**有理型**”な局所演算子に注目する：

$$\partial_{\bar{z}}\mathcal{O}(z, \bar{z}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{O}(z, \bar{z}) := \mathcal{O}(z)$$

- 有理型性より， $\mathcal{O}(z)$ のLaurent展開の係数は無限個の保存チャージとなる：

$$\mathcal{O}_n := \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+h-1} \mathcal{O}(z), \quad n+h \in \mathbb{Z}$$

- 共形対称性により $\mathcal{O}(z)$ のself-OPEが定まり，OPEから保存チャージの交換関係が定まる：

$$[\mathcal{O}_n, \mathcal{O}_m] = \dots$$

- 無限個の保存チャージは無限次元の代数を成す：カイラル代数

Chiral algebra in 2d

- 例：エネルギー運動量テンソル⇒共形次元(2,0)の有理型な局所演算子

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz}(z, \bar{z}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{zz}(z, \bar{z}) := T(z)$$

- 保存チャージ：

$$L_n := \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \quad n \in \mathbb{Z}$$

- self-OPE：

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)}$$

- Virasoro代数：

$$[L_n, L_m] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}$$

Chiral algebra in 2d

- カイラル代数の存在において，“有理型”な局所演算子の存在が本質的な役割を果たしている：
 - $d > 2$ 次元の共形場理論において，例えば部分空間 $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^6$ 上に制限された理論を考えても，部分空間 $\mathbb{R}^2$ 上で有理型な局所演算子は存在しない． $\Rightarrow d > 2$ ではカイラル代数は存在しない
- しかし今回注目する理論は“超”共形場理論：
 - $\Rightarrow$ 超対称性を用いていかに有理型な局所演算子の存在を実現させるか？

Hint: Chiral ring for $\mathcal{N}=1$

- $\mathcal{N}=1$ 超対称性を持った4次元の場の量子論において、超チャージ Q の **コホモロジー**を考える：

$$\mathcal{H}_{Q \text{ cohomology}} = \left\{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} Q|\psi\rangle = 0 \\ |\psi\rangle \simeq |\phi\rangle + Q|\chi\rangle \end{array} \right. \right\}$$

- Q のコホモロジーでは、演算子も Q 不変なものに制限される：

$$\{Q, \mathcal{O}(x)\} = 0 : \text{カイラル演算子}$$

また、 $\mathcal{O}_1 \simeq \mathcal{O}_2 + \{Q, \mathcal{A}\}$ の関係にある $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ は同一視される。

- 超対称性代数 $\mathcal{P} = \{Q, \tilde{Q}\}$ より、**カイラル演算子の位置**についての微分は Q について “**exact**” な形になる。つまり、 Q コホモロジーにおいてカイラル演算子は位置に依らない：

$$[\mathcal{P}, \mathcal{O}(x)] = \{Q, \mathcal{O}'(x)\} \implies [Q_i(x)]_{\mathcal{O}} := Q_i$$

Hint: Chiral ring for $\mathcal{N}=1$

- 特に、カイラル演算子の相関関数は $\mathcal{Q}$ のコホモロジーであるかどうかに依らず演算子の挿入された位置に依らない：

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle = \langle \mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_n \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle \\
 &= \langle \{ \mathcal{Q}, \mathcal{O}'(x_1) \} \mathcal{O}_2(x_2) \cdots \mathcal{O}_n(x_n) \rangle \\
 &= \sum_{k>1} \langle \mathcal{O}'(x_1) \cdots \{ \mathcal{Q}, \mathcal{O}_k(x_k) \} \cdots \rangle + \langle \{ \mathcal{Q}, \cdots \} \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

真空の $\mathcal{Q}$ 不変性

- Chiral ringの構成に習い、 $\mathcal{N}=2$ の理論について、超チャージのコホモロジーのレベルで有理型な演算子を実現させる。

$\Rightarrow$ コホモロジーのレベルでカイラル代数が存在

Strategy

- 4次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形代数について, 部分空間 $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ 上に作用する部分代数を選びだす.
- 部分代数において, 以下のような条件を満たす $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 代数および超チャージ Q を構成する:
 - ✓ Q は **冪零** である: $Q^2 = 0$.
 - ✓ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ は部分空間 $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ 上に作用する.
 - ✓ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の正則な生成子は Q と **可換** である.
 - ✓ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の反正則な生成子は Q について “ Q -**exact**” な形で書ける.
- このような構成の下で, Q 不変な $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}^4$ 上の演算子は Q コホモロジーのレベルで有理型演算子となる.

$\mathcal{N}=2$ Superconformal algebra in 4d

- 共形生成子： $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta} = \pm$

$\mathcal{H}$: スケール変換

$\mathcal{P}_{\alpha\dot{\alpha}} := (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{P}_\mu$: 並進

$\mathcal{K}^{\dot{\alpha}\alpha} := (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \mathcal{K}_\mu$: 特殊共形変換

$\mathcal{M}_\alpha{}^\beta := -\frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta \mathcal{M}_{\mu\nu}$: 回転

$\bar{\mathcal{M}}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \mathcal{M}_{\mu\nu}$

- 超チャージ(2成分Weylスピノール)： $\mathcal{I} = 1, 2$

$Q_\alpha^{\mathcal{I}}, \tilde{Q}_{\mathcal{I}\dot{\alpha}}$: Poincaré 超チャージ

$S_I^\alpha, \tilde{S}^{\mathcal{I}\dot{\alpha}}$: 共形超チャージ

- R対称性U(2) :

$$(\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}})_{AB} := \delta^{\mathcal{I}}_A \delta_{B\mathcal{J}}$$

$\mathcal{N}=2$ Superconformal algebra in 4d

- 共形代数：

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \mathcal{P}_{\alpha\dot{\alpha}}] &= \mathcal{P}_{\alpha\dot{\alpha}} \\ [\mathcal{H}, \mathcal{K}^{\dot{\alpha}\alpha}] &= -\mathcal{K}^{\dot{\alpha}\alpha} \\ [\mathcal{K}^{\dot{\alpha}\alpha}, \mathcal{P}_{\beta\dot{\beta}}] &= \delta_{\beta}^{\alpha} \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \mathcal{H} + \delta_{\beta}^{\alpha} \mathcal{M}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} + \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \mathcal{M}_{\beta}^{\alpha} \\ [\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{K}^{\dot{\gamma}\gamma}] &= -\delta_{\alpha}^{\gamma} \mathcal{K}^{\dot{\gamma}\beta} + \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta} \mathcal{K}^{\dot{\gamma}\gamma} \\ [\mathcal{M}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \mathcal{K}^{\dot{\gamma}\gamma}] &= -\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} \mathcal{K}^{\dot{\alpha}\gamma} + \frac{1}{2} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \mathcal{K}^{\dot{\gamma}\gamma} \\ [\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{P}_{\gamma\dot{\gamma}}] &= \delta_{\gamma}^{\beta} \mathcal{P}_{\alpha\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^{\beta} \mathcal{P}_{\gamma\dot{\gamma}} \\ [\mathcal{M}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \mathcal{P}_{\gamma\dot{\gamma}}] &= \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\gamma}} \mathcal{P}_{\gamma\dot{\beta}} - \frac{1}{2} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \mathcal{P}_{\gamma\dot{\gamma}} \\ [\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta}, \mathcal{M}_{\gamma}^{\delta}] &= \delta_{\gamma}^{\beta} \mathcal{M}_{\alpha}^{\delta} - \delta_{\alpha}^{\delta} \mathcal{M}_{\gamma}^{\beta} \\ [\mathcal{M}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \mathcal{M}^{\dot{\gamma}}_{\dot{\delta}}] &= \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\delta}} \mathcal{M}^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} - \delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\beta}} \mathcal{M}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\delta}} \end{aligned}$$

$\mathcal{N}=2$ Superconformal algebra in 4d

- 超対称性代数：

$$\begin{aligned}\{\mathcal{Q}_\alpha^{\mathcal{I}}, \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{J}\dot{\alpha}}\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \mathcal{P}_{\alpha\dot{\alpha}} \\ \{\tilde{\mathcal{S}}^{\mathcal{I}\dot{\alpha}}, \mathcal{S}_{\mathcal{J}}^\alpha\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \mathcal{K}^{\dot{\alpha}\alpha} \\ \{\mathcal{Q}_\alpha^{\mathcal{I}}, \mathcal{S}_{\mathcal{J}}^\beta\} &= \frac{1}{2} \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \delta_\alpha^\beta \mathcal{H} + \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \mathcal{M}_\alpha{}^\beta - \delta_\alpha{}^\beta \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \\ \{\tilde{\mathcal{S}}^{\mathcal{I}\dot{\alpha}}, \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{J}\dot{\beta}}\} &= \frac{1}{2} \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \mathcal{H} + \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \mathcal{M}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} - \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}\end{aligned}$$

- R対称性：

$$[\mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}}, \mathcal{R}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{L}}] = \delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{L}} - \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{L}} \mathcal{R}^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}$$

ここで、都合により次のような基底を導入しておく：

$$\begin{aligned}r &:= \sum_{\mathcal{I}} \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}} , \quad \mathcal{R} := \mathcal{R}^1_1 - \mathcal{R}^2_2 , \quad \mathcal{R}^+ := \mathcal{R}^1_2 , \quad \mathcal{R}^- := \mathcal{R}^2_1 \\ [\mathcal{R}^+, \mathcal{R}^-] &= 2\mathcal{R} , \quad [\mathcal{R}, \mathcal{R}^\pm] = \pm \mathcal{R}^\pm\end{aligned}$$

Subalgebra of $\mathcal{N}=2$ Superconformal algebra

- 部分空間 $\mathbb{R}^2$ (x_3, x_4 平面) に作用する $\mathcal{N}=2$ 超共形代数の部分代数として以下を選ぶ： 2次元の $\mathcal{N}=(0,4)$ 超共形代数のグローバルな部分

➤ 共形生成子： $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の生成子

$$\begin{aligned} L_{-1} &:= \mathcal{P}_{+\dot{+}} , & L_{+1} &:= \mathcal{K}^{\dot{+}+} , & 2L_0 &:= \mathcal{H} + (\mathcal{M}_+^+ + \mathcal{M}^{\dot{+}}_{\dot{+}}) \\ \bar{L}_{-1} &:= \mathcal{P}_{-\dot{-}} , & \bar{L}_{+1} &:= \mathcal{K}^{\dot{-}-} , & 2\bar{L}_0 &:= \mathcal{H} - (\mathcal{M}_+^+ + \mathcal{M}^{\dot{+}}_{\dot{+}}) \end{aligned}$$

➤ 超対称性生成子：

$$Q^{\mathcal{I}} := \mathcal{Q}_{-}^{\mathcal{I}} , \quad \tilde{Q}_{\mathcal{I}} := \tilde{\mathcal{Q}}_{\mathcal{I}\dot{-}} , \quad S_{\mathcal{J}} := S_{\mathcal{J}}^{-} , \quad \tilde{S}^{\mathcal{I}} := \tilde{\mathcal{S}}^{\mathcal{I}\dot{-}}$$

➤ R対称性U(2)：

$$r := \sum_{\mathcal{I}} \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}} , \quad \mathcal{R} := \mathcal{R}^1_1 - \mathcal{R}^2_2 , \quad \mathcal{R}^+ := \mathcal{R}^1_2 , \quad \mathcal{R}^- := \mathcal{R}^2_1$$

Subalgebra of $\mathcal{N}=2$ Superconformal algebra

➤ 共形代数： $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned}[L_{+1}, L_{-1}] &= 2L_0, & [L_{\pm 1}, L_0] &= \pm L_{\pm 1} \\ [\bar{L}_{+1}, \bar{L}_{-1}] &= 2\bar{L}_0, & [\bar{L}_{\pm 1}, \bar{L}_0] &= \pm \bar{L}_{\pm 1}\end{aligned}$$

➤ 超对称性代数：

$$\begin{aligned}\{Q^{\mathcal{I}}, \tilde{Q}_{\mathcal{J}}\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \bar{L}_{-1} \\ \{\tilde{S}^{\mathcal{I}}, S_{\mathcal{J}}\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \bar{L}_{+1} \\ \{Q^{\mathcal{I}}, S_{\mathcal{J}}\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \bar{L}_0 - \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} - \frac{1}{2} \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} (r + \mathcal{M}_+^+ - \mathcal{M}_{\dot{+}}^{\dot{+}}) \\ \{\tilde{Q}_{\mathcal{J}}, \tilde{S}^{\mathcal{I}}\} &= \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \bar{L}_0 + \mathcal{R}^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} + \frac{1}{2} \delta^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} (r + \mathcal{M}_+^+ - \mathcal{M}_{\dot{+}}^{\dot{+}})\end{aligned}$$

➤ R对称性：

$$[\mathcal{R}^+, \mathcal{R}^-] = 2\mathcal{R}, \quad [\mathcal{R}, \mathcal{R}^{\pm}] = \pm \mathcal{R}^{\pm}$$

Construction: cohomology

- 冪零な超チャージ Q を次のように定義する：

$$Q := Q^1 + \tilde{S}^2, \quad Q^\dagger := S_1 + \tilde{Q}_2$$

- Q を用いて反正則な生成子 $\{\bar{L}_0, \bar{L}_\pm\}$ を以下のように再定義する：

$$\hat{L}_{-1} := \bar{L}_{-1} + \mathcal{R}^- = \{Q, \tilde{Q}_1\}$$

$$\hat{L}_{+1} := \bar{L}_{+1} - \mathcal{R}^+ = \{Q, S_2\}$$

$$2\hat{L}_0 := 2(\bar{L}_0 - \mathcal{R}) = \{Q, Q^\dagger\}$$

- 新しく定義された生成子 $\{\hat{L}_0, \hat{L}_\pm\}$ は再び $\mathfrak{sl}(2)$ 代数を成す：

$$[\hat{L}_{+1}, \hat{L}_{-1}] = 2\hat{L}_0, \quad [\hat{L}_{\pm 1}, \hat{L}_0] = \pm \hat{L}_{\pm 1}$$

- 一方, 正則な生成子 $\{L_0, L_\pm\}$ は明らかに Q と可換である.

望ましい構造が構成できた！

Existence of Q-closed operator

- 原点に挿入された “Q-closed” な局所演算子が存在すると仮定する：

$$\{Q, \mathcal{O}(0)\} = 0, \quad \mathcal{O}(0) \neq \{Q, \mathcal{O}'(0)\}$$

- 次の “Q-exact” な生成子に注目する：

$$\mathcal{H} - (\mathcal{M}_+^+ + \mathcal{M}_+^{\dagger}) - 2\mathcal{R} = \{Q, Q^\dagger\}$$

$$-r - (\mathcal{M}_+^+ - \mathcal{M}_+^{\dagger}) = \{Q, Q'\}$$

- “Q-closed” な局所演算子 $\mathcal{O}(0)$ は “Q-exact” な これらの生成子の 0 固有値空間に属さなければならない：

$$E - (j_1 + j_2) - 2R = 0, \quad r + (j_1 - j_2) = 0$$

- 量子数についてこのような関係式を満たす局所演算子は、任意の 4 次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論において必ず存在することが知られている.

Existence of Q -closed operator

- よって, “ Q -closed” な局所演算子 : Schur演算子, は必ず存在し Q コホモロジーは空ではない.
- 部分空間として選んだ $(z, \bar{z})$ 平面の他の点へのSchur演算子の挿入は L_{-1} と $\hat{L}_{-1}$ による並進によって表すことができる :

$$\mathcal{O}(z, \bar{z}) = e^{zL_{-1} + \bar{z}\hat{L}_{-1}} \mathcal{O}(0) e^{-zL_{-1} - \bar{z}\hat{L}_{-1}}$$

L_{-1} は “ Q -closed”, $\hat{L}_{-1}$ は “ Q -exact” であるから, 並進されたSchur演算子もまた “ Q -closed” な局所演算子である.

- Schur演算子は Q コホモロジーのレベルで有理型な局所演算子となる :

$$[\mathcal{O}(z, \bar{z})]_Q \Rightarrow \mathcal{O}(z)$$

$\Rightarrow$ Q コホモロジーのレベルでカイラル代数が存在する

Some comments

- 今回紹介した論文では他に……
 - 全ての4次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論に含まれるタイプのSchur演算子を用いて、実際にVirasoro代数やカレント代数を導いている.
 - 4次元の $\mathcal{N} = 2$ 超共形場理論の具体的なモデルにこの構成を適用している.