Topological String Correlators from Matrix Models

R. de Mello Koch and L. Nkumane JHEP 03, 004 (2015)

Ref.

R. Gopakumar and R. Pius, JHEP 1303, 175 (2013)

R. Gopakumar, arXiv:1104.2386[hep-th]

難しい証明問題に出くわした時にどうするか？

良くある答え：　簡単な例を考えてみて、感じをつかむ

この戦略は理論物理の研究の最前線でも有効だろうか？「難しい証明問題」として

ゲージ/重力対応

を考えてみる。この時、簡単な例があるか？

ゲージ/重力対応の簡単な例はあるか？

- AdS/CFT対応　　　場の理論側はN=4 SYMやABJM等　　難しい！
  （3、4次元の理論で強結合）
- 一次元まで落とす　　BFSS行列模型など　まだ難しい！

どこが難しいか？

・相互作用がある

・量子力学（場の理論）である

「最も簡単な例」が持っていてほしい性質は？

・場の理論側は0+0次元、相互作用なし（完全に解ける）であってほしい

・さらに行列の構造を持っていてほしい　$(g_s \sim 1/N)$

・対応する弦理論が何かも分かっていてほしい（さらにそれも可解であってほしい）

Gaussian Matrix Model

$$Z = \int dM e^{-\frac{N}{2}\mathrm{Tr} M^2}$$

$M : N \times N$ エルミート行列

単なる行列のガウス積分

これは（期待値なども全部）解ける！

しかし、これが何かの弦理論に対応するのだろうか？

考察

$$Z = \int dM e^{-S} \qquad S = \frac{N}{2}\mathrm{Tr}M^2 = \frac{N}{2}M^i_j M^j_i$$

$$\langle M^i_j M^k_l \rangle = \frac{1}{N}\delta^i_l \delta^j_k$$

例. k=3

$$\langle M^{i_1}_{j_1} \cdots M^{i_{2k}}_{j_{2k}} \rangle = N^{-k} \sum_{\alpha \in [2^k]} \delta^{i_1}_{j_{\alpha(1)}} \cdots \delta^{i_{2k}}_{j_{\alpha(2k)}} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=: N^{-k} \sum_{\alpha \in [2^k]} \delta^{\{i_l\}}_{\{j_{\alpha(l)}\}}$$

(Wickの定理)

Traceの構造も置換群の元を用いて表す

$$\mathrm{Tr}M^{k_1}\mathrm{Tr}M^{k_2} \cdots \mathrm{Tr}M^{k_n} = M^{i_1}_{j_1} \cdots M^{i_{2k}}_{j_{2k}} \ \delta^{\{j_{\beta^{-1}(l)}\}}_{\{i_l\}} \qquad 2k = \sum_{l=1}^{n} k_l$$

$$\beta^{-1} = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & k_1 \\ 2 & 3 & \cdots & 1 \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} 1' & 2' & \cdots & k_2' \\ 2' & 3' & \cdots & 1' \end{matrix}} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \right)$$

$$N^n\langle \mathrm{Tr}M^{k_1}\mathrm{Tr}M^{k_2}\cdots\mathrm{Tr}M^{k_n}\rangle_{conn}$$

$$= N^n\langle M^{i_1}_{j_1}\cdots M^{i_k}_{j_k}\rangle\,\delta^{\{j_{\beta-1}(l)\}}_{\{i_l\}}$$

$$= N^{n-k}\sum_{\alpha\in[2^k]'}\delta^{\{i_l\}}_{\{j_{\alpha(l)}\}}\delta^{\{j_{\beta-1}(l)\}}_{\{i_l\}}$$

Connectedな縮約のみ

$$= N^{n-k}\sum_{\alpha\in[2^k]'}\delta^{\{j_{\beta-1}(l)\}}_{\{j_{\alpha(l)}\}}$$

$$\delta(\alpha)=\begin{cases}1\ (\alpha=\mathrm{id})\\ 0\ (\alpha\neq\mathrm{id})\end{cases}$$

$$= \sum_{\alpha\in[2^k]'}\sum_{\gamma\in S_{2k}}\delta(\gamma\circ\beta\circ\alpha)N^{c_\gamma+n-k}$$

c_γ : γ のサイクルの数

$$= \sum_{\alpha\in[2^k]'}\sum_{\gamma\in S_{2k}}\delta(\gamma\circ\beta\circ\alpha)N^{4k-(2k-c_\alpha)-(2k-c_\beta)-(2k-c_\gamma)}$$

$$c_\alpha=k,\ c_\beta=n$$

これは見る人が見れば、「おおっ、これは弦理論じゃないか」と思えるらしい

どうやってこれが弦理論だと思えるか？

$$N^n\langle \mathrm{Tr}M^{k_1}\mathrm{Tr}M^{k_2}\cdots\mathrm{Tr}M^{k_n}\rangle_{conn}$$

$$=\sum_{\alpha\in[2^k]'}\sum_{\gamma\in S_{2k}}\delta(\gamma\circ\beta\circ\alpha)N^{4k-(2k-c_\alpha)-(2k-c_\beta)-(2k-c_\gamma)}$$

・ゲージ/重力対応では、$g_s\sim 1/N$ という関係式があった。

・弦理論では、g_s はオイラー数のウエイトをコントロールするパラメータ

$$Z_{string}\sim\sum_{\text{Topology}}g_s^{2g-2}\int DXe^{-S_{string}}$$

g：世界面の種数

$$\Rightarrow\quad 2-2g=4k-\sum_{i=\alpha,\beta,\gamma}(2k-c_i)$$

・この式から対応する弦理論を予想できる

Riemann-Hurwitzの定理
Belyiの定理

RIEMANN–HURWITZの定理

$f : \Sigma_g \to \Sigma_G$ Holomorphic covering map with degree d

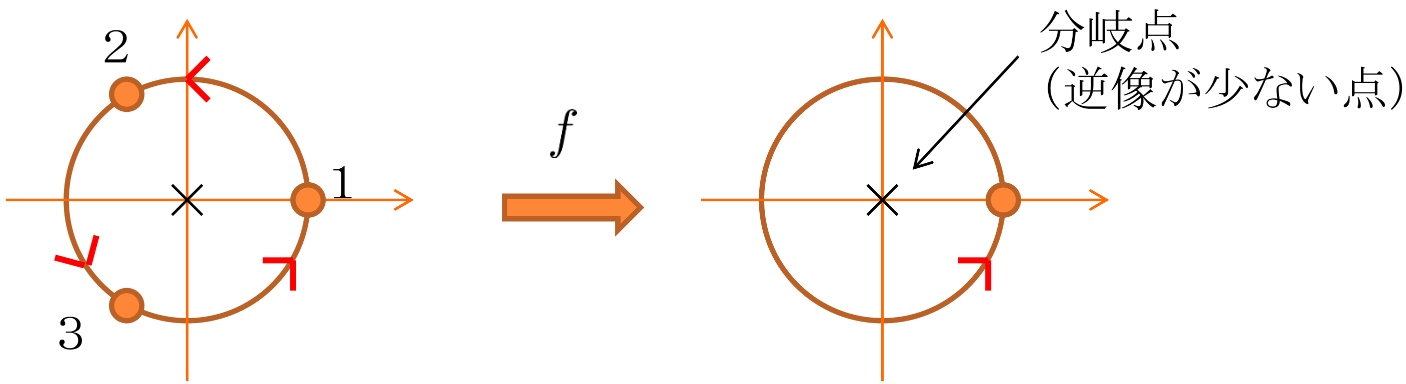
$$\boxed{2 - 2g = d(2 - 2G) - \sum_{i \in \text{branch points}} (d - c_i)}$$

c_i：各分岐点に対するサイクル数（以下参照）

例 $f : P^1 \to P^1$

$f(z) = z^3$

$d = 3$



$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad c_0 = c_\infty = 1$$

LHS=2−0=2, RHS=3(2−0)−(3−1)−(3−1)=2

Gaussian Matrix Modelの解釈

$$N^n \langle \mathrm{Tr} M^{k_1} \mathrm{Tr} M^{k_2} \cdots \mathrm{Tr} M^{k_n} \rangle_{conn} \;=\; \sum_{\alpha \in [2^k]'} \sum_{\gamma \in S_{2k}} \delta(\gamma \circ \beta \circ \alpha) N^{2-2g}$$

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= 4k - \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma} (2k - c_i) \\ &= 2k(2-0) - \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma} (2k - c_i) \end{aligned}$$

Target spaceの種数 $G = 0$ ⇒ Target spaceはP^1

さらに、被覆次数が2kで、3つの分岐点を持つ写像の足しあげのように見える。
ここからさらに情報を引き出せるか？

Belyiの定理

- Belyi写像: holomorphic covering from Σ_g to P^1 with 3 branch points

- 代数的数: 有理数係数の多項式で与えられる代数方程式の解になりうる数

$x^2+1=0 \to x=\pm i$ は代数的数

$x^2-3=0 \to x=\pm\sqrt{3}$ は代数的数

$x-\alpha=0 \to x=\alpha$ 有理数は全て代数的数に含まれる

π, e は代数的数ではない(超越数)

代数的数は体 $\bar{Q}$ を成す

- Arithmetic Riemann surface: $\bar{Q}$ 上に定義方程式を持つリーマン面

$\left[\ f(z_1,z_2)=0\ \text{の係数が}\ \bar{Q}\ \right]$

Belyi map exists if and only if Σ_g is an arithmetic Riemann surface

GAUSSIAN MATRIX MODELの解釈

① Target spaceがP^1の弦理論

② 特別な(Arithmeticな)面のみを足しあげている

③ 考えている演算子に応じて、被覆次数が定まった写像のみ足しあげている

これらを全て満たすかもしれない弦理論の候補として

P^1上のTopological A-model

と呼ばれるものがある [Gopakumar]

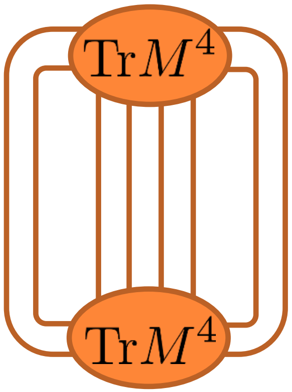
② → Topological A-modelを $\Sigma_g = \Sigma_G = T^2$の場合に考えると、
Moduli積分が離散的な和に落ちることが知られている。
(今の場合Arithmeticなものだけに落ちるかは不明)

③ → Ghost numberの保存則に対応

Topological Stringの話に行く前に

Gaussian matrix model のファインマン図を、弦の世界面に見なせないか？

$$\langle \mathrm{Tr} M^4 \mathrm{Tr} M^4 \rangle_{conn} \sim$$



$$+\cdots$$

問①: 各ファインマングラフから、弦の世界面を作れるか？

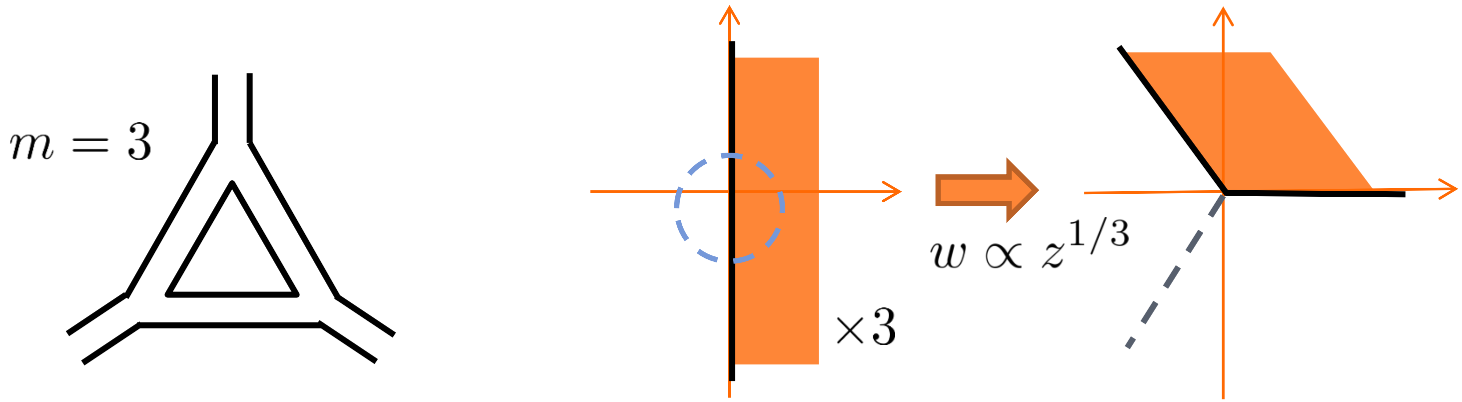
ファインマン図の足しあげ ＝ 弦理論の経路積分？

問②: 作った面はArithmeticなリーマン面になっているか？

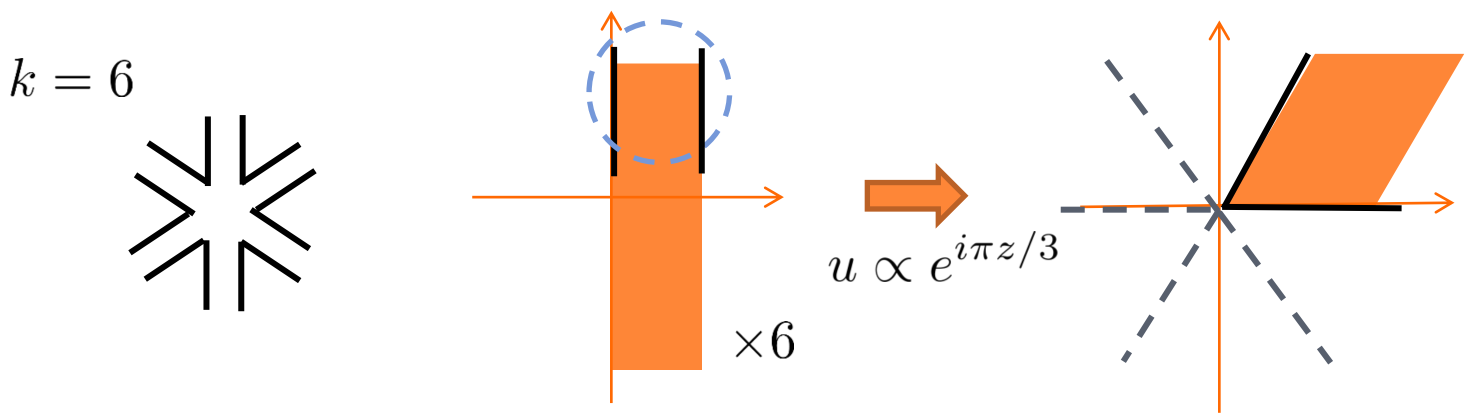
Worldsheet from Feynman Graphs

① Feynman図の各プロパゲータに、strip $\{z \in C | 0 \le \mathrm{Re} z \le 1\}$ を割り当てる

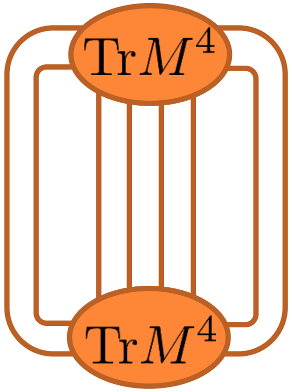
② m個のプロパゲータが一つの面を囲む場合 ⇒ $w \propto z^{1/m}$ でstripを貼りあわせる

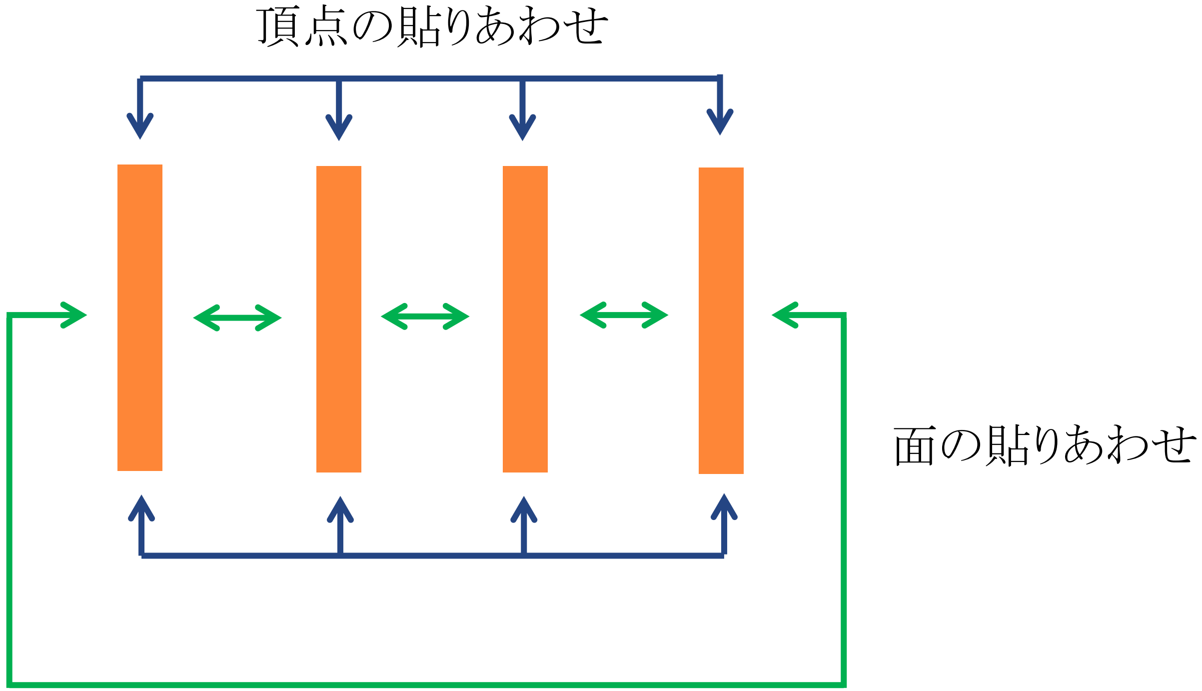


③ k個のプロパゲータが一つの頂点から出る場合 ⇒ $u \propto e^{2\pi i z/k}$ で貼りあわせる



EXAMPLE





このように作った面はARITHMETICか？

Belyi写像が作れるか？

$$f : \mathrm{strip} \to P^1$$
$$z \mapsto \sin^2 \pi z$$

P^1をちょうど二回覆う写像

これを先ほどのルールで貼りあわせると、2k次のcoveringになる(kはstripの数)

さらにその写像は三つの分岐を持ち、分岐次数が行列模型の計算に現れた $\alpha, \beta, \gamma \in S_{2k}$ の構造と一致することが分かる ⇒ Belyi写像である

例）各頂点での貼りあわせ $(z \sim i\infty)$ $u \sim e^{2\pi i z/k_i}$

$$X(u) := f(z(u)) = \sin^2 \pi z \sim \sin^2\left(\frac{k_i}{2\pi i}\log u\right) \sim u^{-k_i}$$

分岐次数 k_i ⇒ β の分岐を再現

⇒ 行列模型をArithmeticなリーマン面（Belyi写像）の和として解釈できる！

Topological A-model on P^1

Physical operator ⇔ Cohomology

$$\begin{cases} Q: & \text{Kahler class operator} \\ P: & \text{Puncture operator} \\ \sigma_n(Q), \sigma_n(P): & \text{“gravitational descendants”} \end{cases}$$

$$\sigma_n(A) := \phi^n \cdot A$$

↑

The scalar field in gravity multiplet $(\omega_\mu, \psi_\mu, \phi)$

これらの相関関数は例えばEguchi-Yangによって提唱された行列模型などを用いて計算することが出来る。

演算子の対応関係についての提案

- Gopakumar–Pius

$$\sigma_k(Q) \leftrightarrow \frac{1}{k}\mathrm{Tr}M^k$$

- de Mello Koch–Nkumane

$$\sigma_k(P) \leftrightarrow \frac{1}{k}\mathrm{Tr}M^k \log M$$

相関関数をlarge-N（sphere）の場合に計算し、両者が一致することが確認された。
ただし、素朴な相関関数を比べると一致しない。← Contact termの不定性

$$\langle \prod_{i=1}^{n} \sigma_{k_i} \rangle_{TS} = \sum_{m=1}^{n} \sum_{partitions} \langle \prod_{j=1}^{m} O_{\mu_j} \rangle_{GMM}$$

（cf. resonance transformation for old type matrix models）
[Belavin–Zamolodchikov]

まとめ

Gausiaan matrix model = Topological A-model on P^1? ［Gopakumar］

演算子の対応 ［Gopakumar-Pius, de Mello Koch-Nkumane］

課題：1/N補正を含めても等価性があるか？