

Matrix embeddings on flat \mathbb{R}^3 and the geometry of membranes

David Berenstein, Eric Dzienkowski, Phys.Rev.D86(2012) 086001

1. 導入

- M理論……………メンブレインの理論。
作用を行列正則化した行列模型によって定式化されると期待されている。
メンブレインの幾何は行列の配位で記述される。
- N D-brane……………N枚のD-braneの位置は、
N×Nのエルミート行列で表される。

→ 行列と幾何の関係が知りたい。

1. 導入

M理論(BFSS模型)の作用は次のようにかける。

$$S = -T \int dt d^2\sigma \left(\sqrt{-\det h_{\alpha\beta}} + \text{fermion} \right)$$

↓ polyakov型

$$S = -\frac{T}{2} \int dt d^2\sigma \sqrt{-\gamma} (\gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - 1) + \text{fermion}$$

↓ ゲージ固定、行列正則化、光円錐座標

$$S_{BFSS} = \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2(2R)} (\dot{X}^i)^2 + \frac{i}{2(2R)} \psi^\dagger \dot{\psi} + \frac{(2R)}{4} [X^i, X^j]^2 + \frac{(2R)}{2} \psi^\dagger \gamma^i [X^i, \psi] \right)$$

今回は簡単のため X^1, X^2, X^3 だけを考え、 \mathbb{R}^3 に埋め込まれているとする。ガンマ行列はパウリ行列である。

→ 行列 X^i, ψ が与えられたときに、対応する幾何(メンブレインの形)は何かを知りたい。

1. 導入

行列では多体系を自然に記述することができる。

$$\hat{X}^i \quad \rightarrow \quad \text{1体}$$

$$X^i = \begin{pmatrix} \hat{X}^i & \square \\ \square & \hat{X}^i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{2体}$$

$$\text{非対角ブロック} \quad \rightarrow \quad \text{相互作用}$$

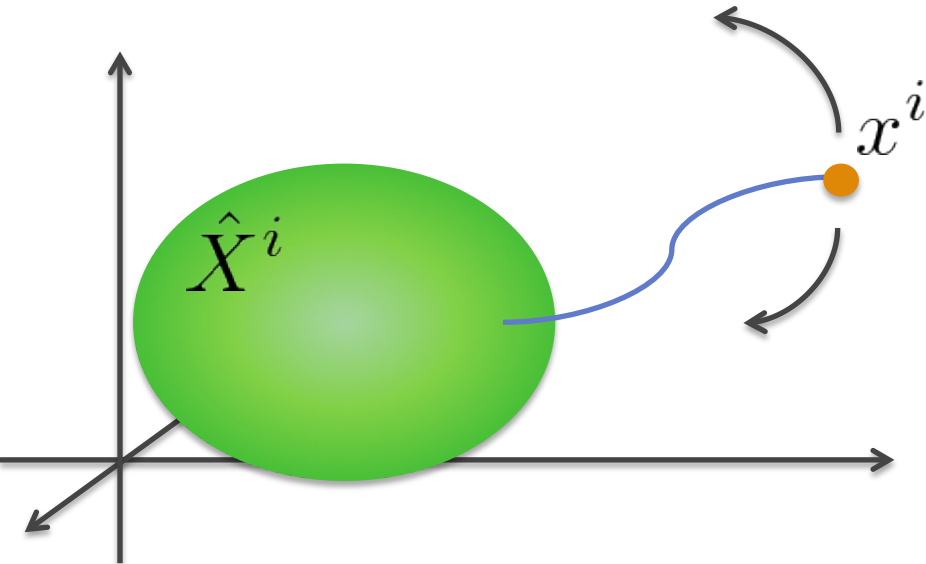
作用の行列を置き換えれば多体系を記述できる。

→ この性質を用いて、プローブ(D0ブレーン)を入れる。

1. 導入

(x_1, x_2, x_3) に位置する、点プローブを入れる。

$$X^i = \left(\begin{array}{c|c} \hat{X}^i & \begin{array}{c} \text{■} \\ \text{■} \\ \text{■} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \text{■} \\ \text{■} \\ \text{■} \end{array} & x^i \end{array} \right) \begin{array}{l} \} N \\ \} 1 \end{array}$$



プローブを動かしたときに、非対角ブロックの応答を見ることで \hat{X}^i の幾何を特徴づけられる。

→ Index, Linking number

発表の流れ

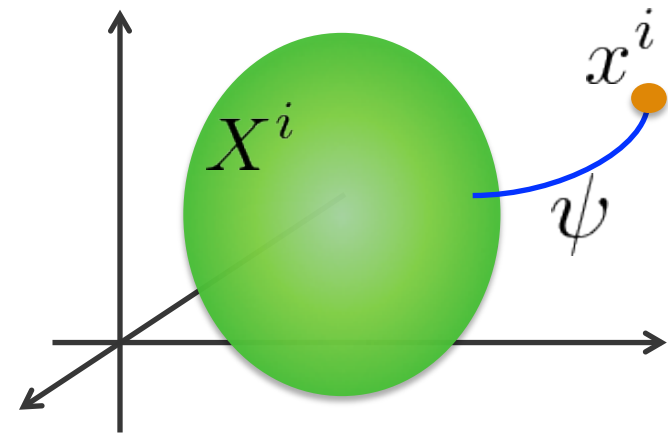
1. 導入
2. 行列の幾何
3. 指標(*Index*)
4. 例1: 球面
5. 例2: 球面からトーラス
6. まとめ

2. 行列の幾何

2. 行列の幾何

メンブレインの幾何はボソンが表していた。

非対角ブロックに注目してメンブレインの幾何を読み取る。



$$\tilde{X}^i = \begin{pmatrix} X^i & \begin{array}{c} \text{hatched} \\ \text{rectangle} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{hatched} \\ \text{rectangle} \end{array} & x^i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \text{hatched} \\ \text{rectangle} \end{array} & \psi \\ \begin{array}{c} \text{hatched} \\ \text{rectangle} \end{array} & \begin{array}{c} \text{hatched} \\ \text{rectangle} \end{array} \end{pmatrix}$$

→ ボソンとフェルミオンの相互作用項を見れば良い。

2. 行列の幾何

BFSS模型の作用の中でフェルミオンとボゾンが相互作用している部分を抜き出し、行列を置き換えると

$$S_{BFSS} = \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2(2R)} (\dot{X}^i)^2 + \frac{i}{2(2R)} \psi^\dagger \dot{\psi} + \frac{(2R)}{4} [X^i, X^j]^2 + \frac{(2R)}{2} \psi^\dagger \gamma^i [X^i, \psi] \right)$$

$$\text{Tr} \left(\tilde{\psi}^\dagger \sigma_i [\tilde{X}^i, \tilde{\psi}] \right) \rightarrow \psi^\dagger \sigma_i (X^i - x^i) \psi$$

ここに出てきたディラック演算子をハミルトニアン H と呼ぶ。

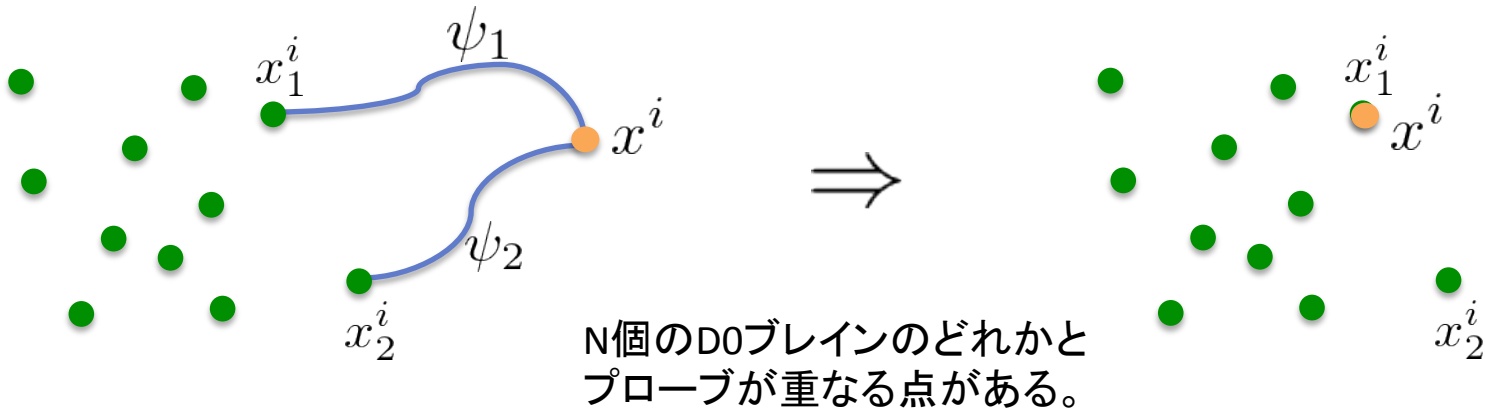
$$H = \sigma_i (X^i - x^i)$$

2. 行列の幾何

行列 X^i が対角のとき

$$X^i = \begin{pmatrix} x_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & x_N^i \end{pmatrix} \rightarrow \text{N個のD0ブレイン}$$

$$\sigma_i(X^i - x^i)\psi = \sigma^i \begin{pmatrix} x_1^i - x^i & & \\ & x_2^i - x^i & \\ & & \ddots \\ & & & x_N^i - x^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$



D0ブレインとプローブが重なる点で H が0固有値を持つ。

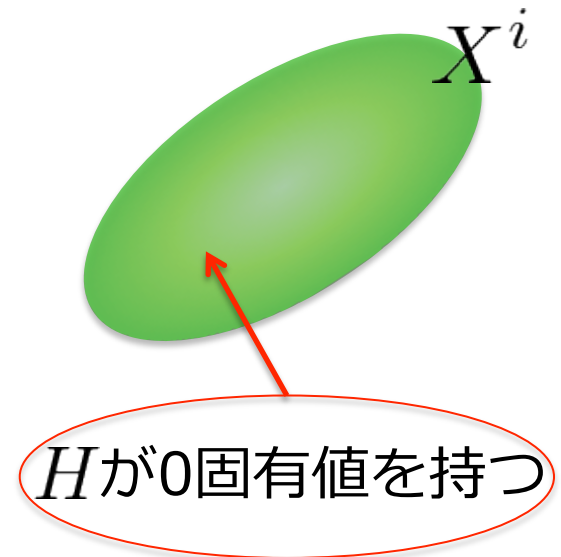
2. 行列の幾何

逆に一般の X^i に対しても、

H が0固有値を持つ点の集合を行列 X^i に対応する幾何

と定義する。

H が0固有値を持つとき
メンブレインとプローブが重なっている。



3. 指標(*Index*)

3. 指標(*Index*)

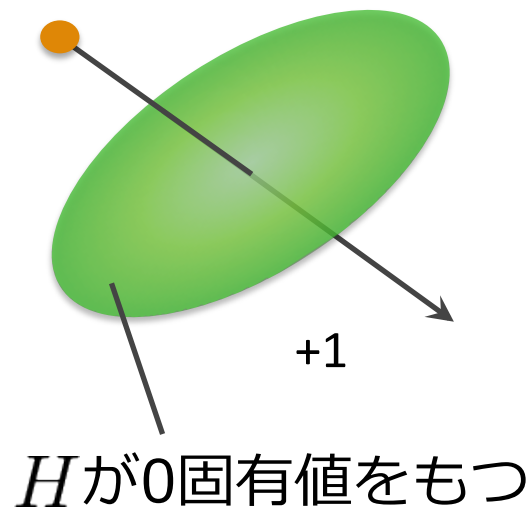
一般的に、 x^i に依っている H を常に対角化するのは難しい。

もっと簡単に幾何を調べられる量を導入したい。

実際に H が0固有値を持つ点を探さなくても面の存在を確認できないだろうか？

プローブが面を通過したときだけ変化する量があれば良い。

そのような量として指標(*Index*)を導入する。



3. 指標(Index)

プローブが無限遠方にあるとき
 $(x^1, x^2, x^3) = (0, 0, \infty)$ を考える。

H は

$$H = -x^3 \sigma_3 + X^i \sigma_i$$

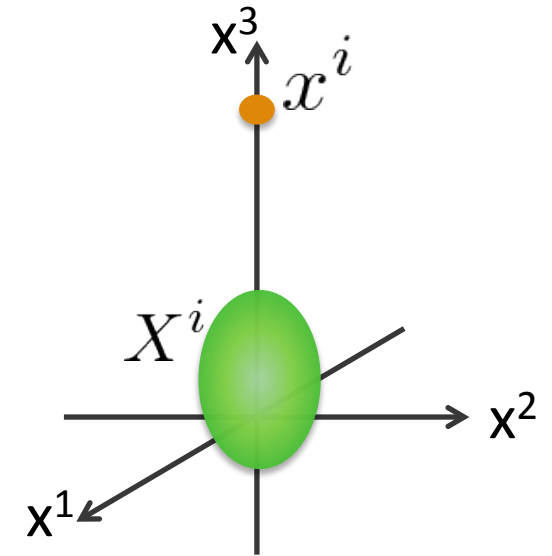
→ 摂動論を用いて、固有値を評価できる。

固有値は

$$E_\alpha = \pm(x^3 - \lambda_\alpha^3) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

λ_α^3 : X^3 の固有値

→ 無限遠方では正固有値と負固有値の数と同じ



3. 指標(*Index*)

次に、プローブを動かしたときの固有値の変化をみる。

面を通過するまでは正負固有値の数は変わらない。

プローブが面を通過したとき
固有値のどれかが、一度0になる点がある。

そのときの固有値の変化として
次の4つがある。

プローブ x^i

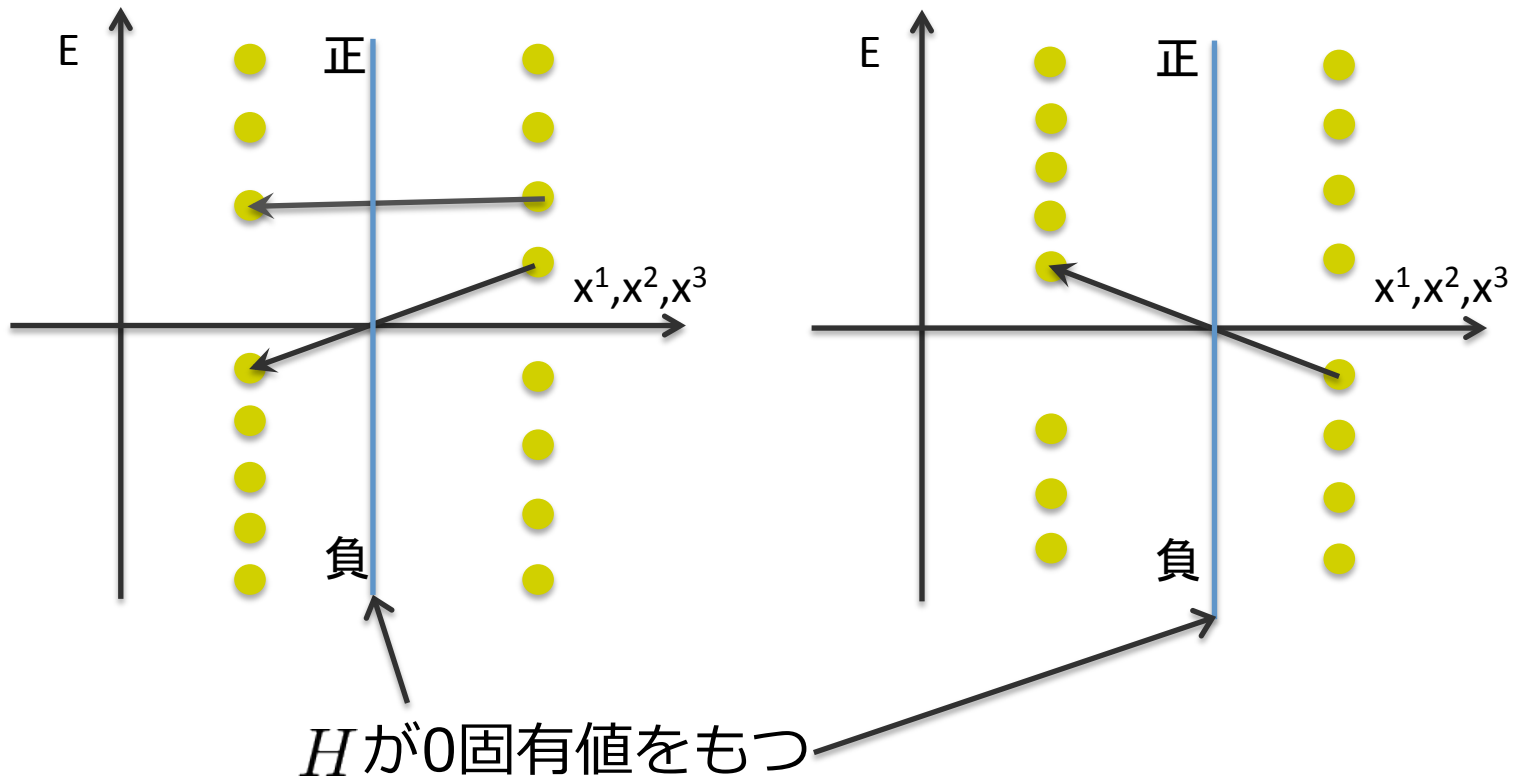


面 H が 0 固有値
をもつ

3. 指標(*Index*)

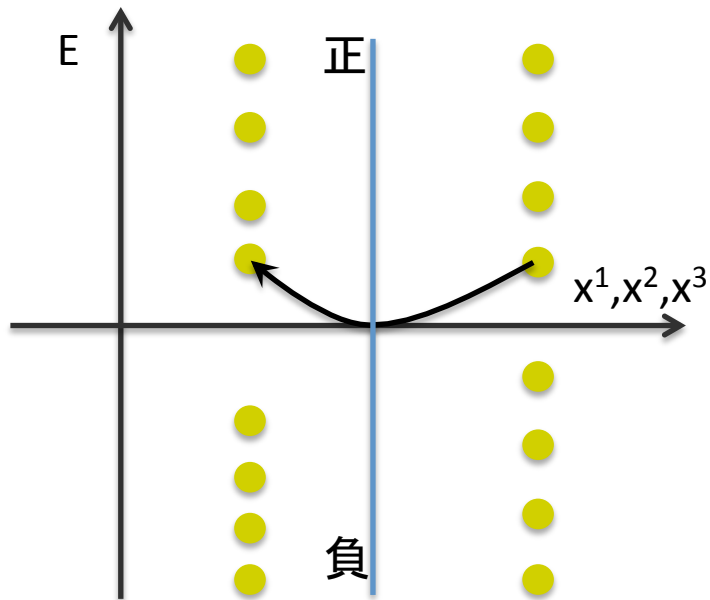
(i) 正から負へ

(ii) 負から正へ

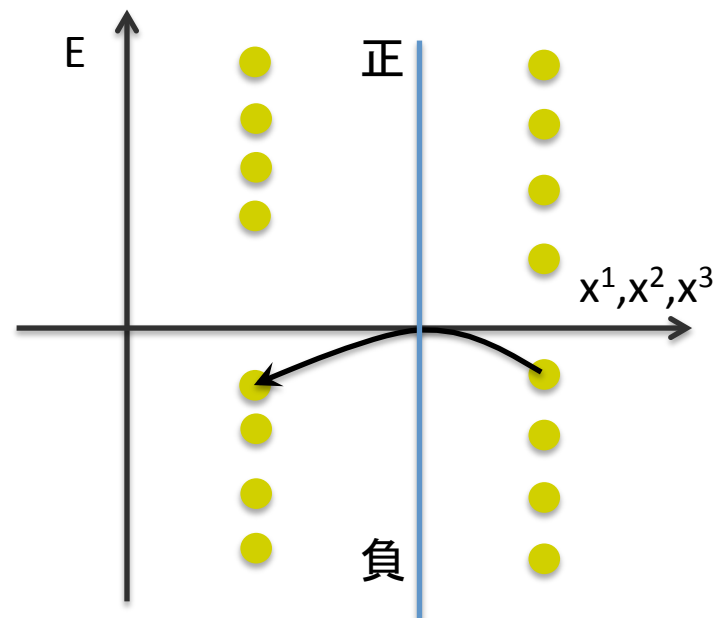


3. 指標(*Index*)

(iii) 正から正へ



(iv) 負から負へ



→ (i)(ii)を見ると面を通過した前と後で、正固有値と負固有値の数が変わっている。

3. 指標(*Index*)

正負固有値の数の変化に反応する指標

$$I((x^1, x^2, x^3))_{X^i} = \frac{n_+ - n_-}{2}$$

n_+ : 正固有値の数 n_- : 負固有値の数

(i)(ii)の場合だと一つ面を通過するごとに、指標は ± 1 変化することが分かる。

指標の値が変わる \rightarrow 面が存在する。

ただし、

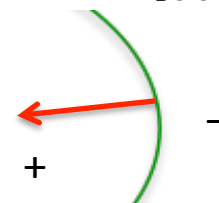
(iii)(iv)の場合、または、(i)(ii)が同時に起こる場合は指標は感知できない。

3. 指標(Index)

指標の性質

(1) 指標は無遠方で0。指標の値が変化するとき H が0固有値を持ち、そこには面がある。

(2) 指標の値の増減を利用して面に向きを定義できる。指標の値が増える方向に面が向いているとする。



(3) 二つの行列 $(X^i)'$, $(X^i)''$ があつたとき $X^i = (X^i)' \oplus (X^i)''$ を考えると指標は

$$I((x^1, x^2, x^3))_{X^i} = I((x^1, x^2, x^3))_{(X^i)'} + I((x^1, x^2, x^3))_{(X^i)''}$$

3. 指標(*Index*)

指標の性質

(4) 指標は回転、並進、スケール倍で不変である。

(5) 行列 X^i の複素共役をとると正と負の固有値の数が入れ替わる。

$$I((x^1, x^2, x^3))_{X^i} = -I((x^1, x^2, x^3))(X^i)^*$$

(6) 上の性質から X^i が実行列であったら指標は0。

$$I((x^1, x^2, x^3))_{X^i} = 0$$

4. 例1: 球面

4. 例1: 球面

fuzzy sphere: スピン j の角運動量演算子 L^i で定義される。

$$X^i = \frac{r}{j} L^i$$

$$(X^i)^2 = \left(1 + \frac{1}{j}\right) r^2$$

$$[X^i, X^j] = \frac{r}{j} i\epsilon_{ijk} X^k$$

L^i : $(2j+1) \times (2j+1)$ 行列

r : 球面の半径

行列サイズが大きいくとき、 $(j \rightarrow \infty)$

$$(X^i)^2 \rightarrow r^2, \quad [X^i, X^j] \rightarrow 0$$

半径 r の球面と同じ性質をもつ。

4. 例1: 球面

fuzzy sphereの行列に対して指標を用いて幾何を調べてみる。
プローブが無限遠方にあるときは指標は0、無限遠方から中心に近づけていったとき、一回だけ球面を通るはずである。

中心に置いた指標の値を調べてみる。

$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ のときハミルトニアンは

$$H = \frac{r}{j} L^i \otimes \sigma_i$$

これは単にスピン j 表現とスピン $\frac{1}{2}$ 表現の直積であるので既約分解できる。


$$(j) \otimes \left(\frac{1}{2}\right) = \left(j + \frac{1}{2}\right) \oplus \left(j - \frac{1}{2}\right)$$

4. 例1: 球面

また、ハミルトニアンは次のように書ける。

$$L^i \otimes \sigma_i = (L^i \otimes 1 + 1 \otimes \frac{\sigma_i}{2})^2 - L^2 \otimes 1 - 1 \otimes \frac{\sigma_i^2}{4}$$

$$= \underline{J^2} - j(j+1) - \frac{3}{4} \quad (J = L^i \oplus 1 + 1 \oplus \frac{\sigma_i}{2} : \text{全角運動量})$$



$$J^2 = \begin{cases} (j + \frac{1}{2})(j + \frac{3}{2}) & (j + \frac{1}{2}) \\ (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) & (j - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

固有値は

$$L^i \otimes \sigma_i = \begin{cases} j & (j + \frac{1}{2}) \\ -j - 1 & (j - \frac{1}{2}) \end{cases} = \left(\begin{array}{c|c} j & \\ \hline & -j - 1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 2j+2 \\ \} 2j \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\hspace{100px}}_{2j+2}$
 $\underbrace{\hspace{100px}}_{2j}$

4. 例1: 球面

正固有値の数は $2j+2$ 個、負固有値の数は $2j$ 個と分かったので、指標は

$$I((0, 0, 0))_{X^i} = \frac{n_+ - n_-}{2} = 1$$

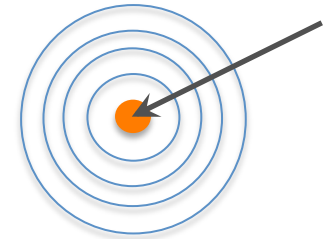
無限遠方から中心に持ってくるときに少なくとも一つの面を通っている。

また、回転対称性から球面ではないかと予想できる。

→ $(2j+1) \times (2j+1)$ 行列 L^i が球面を表していることが確認できた。
指標がちゃんと機能していることが分かった。

4. 例1: 球面

応用:



中心を同じくするFuzzy sphereが複数枚ある場合。
プローブを無限遠方から中心に移動させるとき、面と交わるたびに指標の値が変わる。

ただし、逆向きの面を通ったとき指標は-1される。

→ 中心での指標はFuzzy sphereが何枚あるかの最小値を表す。

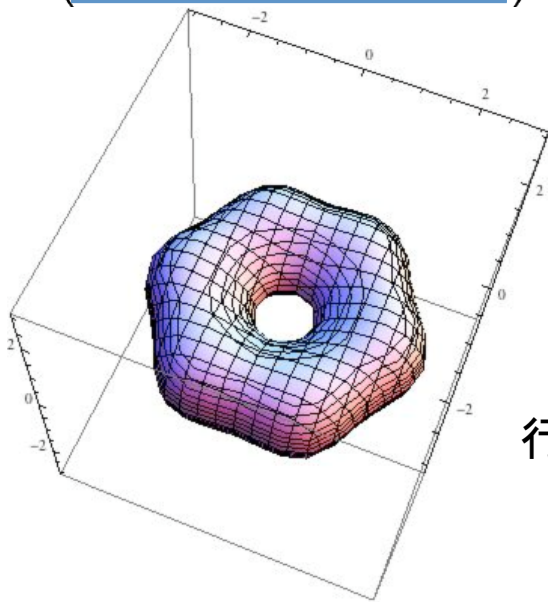
5. 例2: 球面からトーラス

5. 例2: 球面からトーラス

Fuzzy sphereの昇降演算子に少し変更を加えるだけで、トーラスを作ることができる。

$$X^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{2j} & & & & & \beta \\ & \sqrt{4j-2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \sqrt{4j-2} & \\ 0 & & & & & \sqrt{2j} \end{pmatrix}$$

$$X^- = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & \sqrt{2j} & & & & \\ & & \sqrt{4j-2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ \beta & & & & & \\ & & & & & \sqrt{4j-2} \\ & & & & & & \sqrt{2j} \end{pmatrix}$$



$\beta=j$ のときトーラスになる。

行列サイズ = 6×6

6. まとめ

6. まとめ

- ハミルトニアンを用いて行列の表す幾何を定義できた。
- 幾何を特徴づける量を導入できた。→ 指標(*Index*)
- 球面やトーラスを例に、それらを使って幾何を調べることができた。
- ブラックホール内部の構造を調べることができる。