Causality Constraints on Corrections to the Graviton Three-Point Coupling

Xi´an O. Camanho, Jos´e D. Edelstein ,
Juan Maldacena and Alexander Zhiboedov

arXiv:1407.5597v1 [hep-th] 21 Jul 2014

論文の内容

- 高階微分項があるとき重力による相互作用で因果律が破れる場合がある
- 問題の原因や解決の可能性を調べる
- 場の理論では因果律が破れる問題を解決できない
- ストリング理論で解決可能

Introduction

因果律が破れる場合とは

$$S = \frac{1}{l_p^{D-2}} \int d^D x \sqrt{-g} R$$

・・・因果律は破れていない　$\boxed{\to 1}$

$$S = \frac{1}{l_p^{D-2}} \int d^D x \sqrt{-g} [R + \underline{\alpha_2 (R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2) + \alpha_4 R^3 \cdots}]$$

・・・因果律が破れる場合がある　$\boxed{\to 2}$

・どういう時に破れるか

$$R \sim \frac{1}{L^2} \qquad L: 長さ$$

$$\alpha_2 \sim L^2 \gg l_p^2, \qquad \alpha_4 \sim L^4 \gg l_p^4$$

Weak coupling

話の流れ

1. 因果律が破れているかを見るには
   - 因果律　判定方法
   - Einstein重力理論
   - Feynman diagramによる計算

2. 因果律の破れ
   - R^2 を含む重力理論 （Gauss-Bonnet重力理論）
   - R^3 を含む重力理論

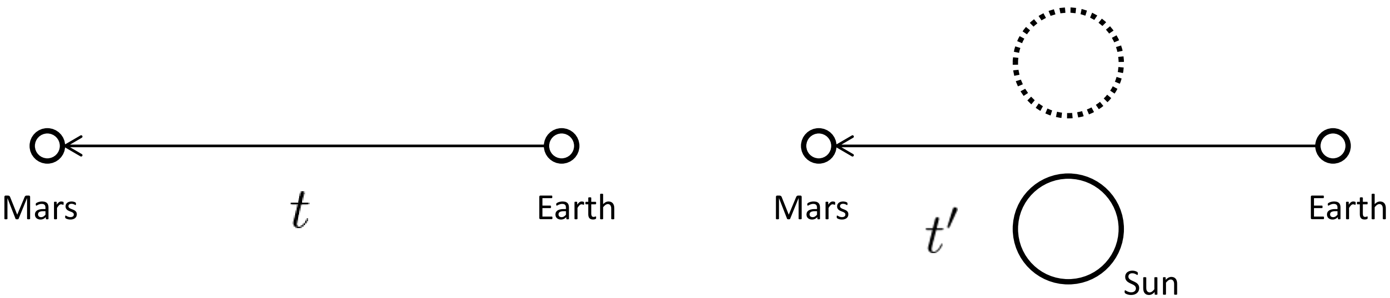
3. 問題の解決法
   - spin 2の場合
   - spin J>2の場合

4. まとめ

因果律　判定方法　Shapiro time delay

Shapiro time delayとは？

・一般相対論の検証の一つ
・重力場の影響で到達時間の遅れが生じること



$$\Delta t \equiv t' - t > 0$$ Time delay

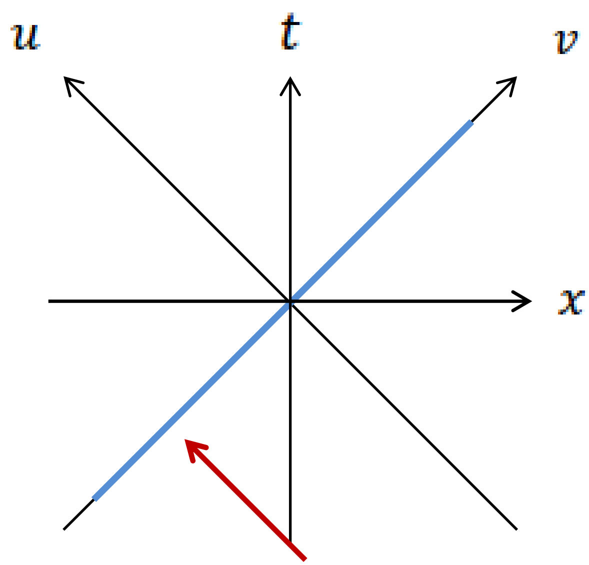
$$\Delta t \equiv t' - t < 0$$ Time advance

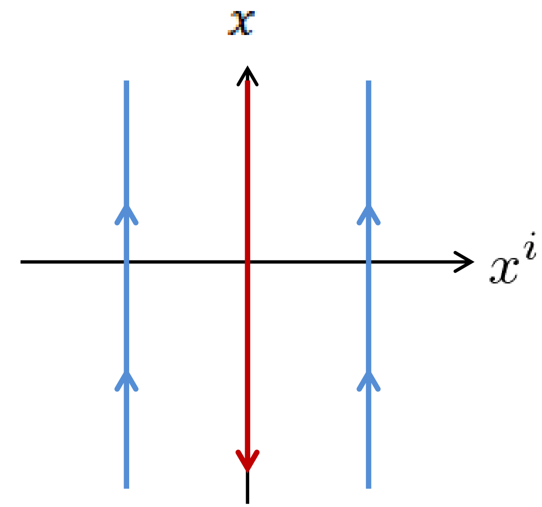
光速で動く粒子にtime advance
　→因果律が破れている

Shock wave model

Shock wave

入射する粒子





Shock wave解

$$ds^2 = -du\,dv + \underbrace{\boxed{h(u, x^i)}}_{\text{Shock wave}} du^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (dx^i)^2$$

Einstein重力理論

Einstein重力理論で因果律が破れているか確認

$$T_{uu} = -P_u \delta(u) \delta^{D-2}(\vec{x})$$

$$\partial_i^2 h(u, x_i) = -16\pi G |P_u| \delta(u) \delta^{D-2}(\vec{x})$$

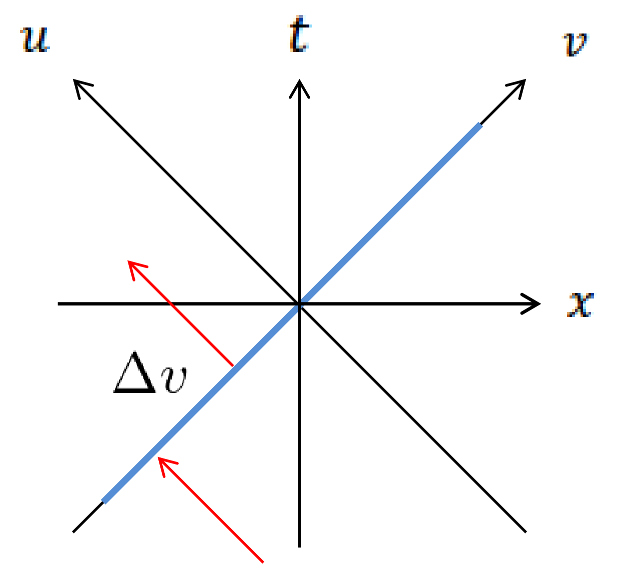
$$\Rightarrow \quad h(u, x_i) = \begin{cases} \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}} \frac{G|P_u|}{r^{D-4}} \delta(u) & D > 4 \\ 8G|P_u|\delta(u) log \frac{L}{r} & D = 4 \end{cases}$$

$$v = v_{new} + \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}} \frac{G|P_u|}{b^{D-4}} \theta(u)$$

$$\Delta v = v_{u \geq 0} - v_{u<0}$$

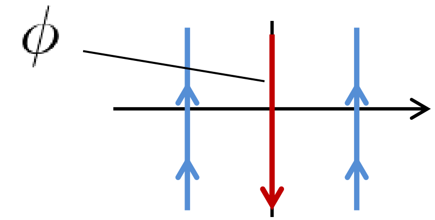
$$= \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}} \frac{G|P_u|}{b^{D-4}} > 0$$

Time delay



⇨ Einstein重力ではいつもTime delayが生じる

スカラー粒子 ϕ の場合



Time delayの効果がどう現れているか

Klein-Gordon方程式 $\qquad \partial^2\phi = 0$

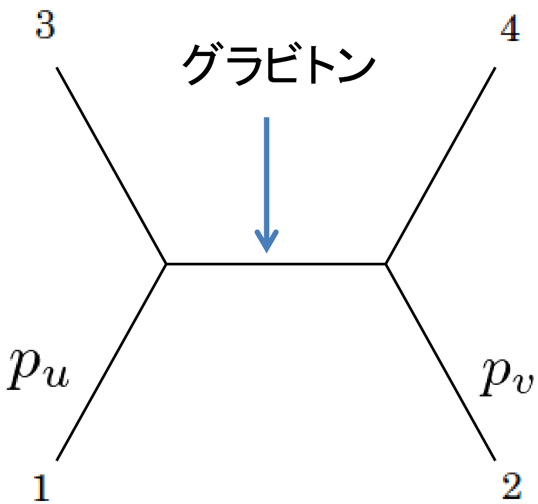
$$\Rightarrow \quad \partial_v\partial_u\phi + h\partial_v^2\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \phi' = exp\left[-i\int_{0^-}^{0^+} du \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}}\frac{G|P_u|}{b^{D-4}}\delta(u)p_v\right]\phi$$

$$= \boxed{e^{-i\Delta v p_v}}\phi$$

位相として効果が現れる

Feynman diagramによる計算



ソース　　　　Shapiro time delayを測る粒子

振幅 $A_{tree}(s,t) = -8\pi G \frac{s^2}{t}$

$$t \simeq -q^2, \quad s \simeq 4 p_u p_v$$

x^i 方向の運動量

$$\delta(b,s) = \frac{1}{2s}\int \frac{d^{D-2}\vec{q}}{(2\pi)^{D-2}} e^{iqb} A_{tree}(s,t)$$

$$= \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}} \frac{Gs}{b^{D-4}} = -p_v \Delta v$$

話の流れ

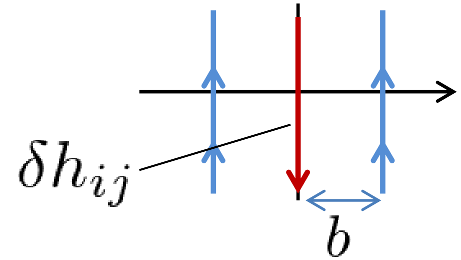
1. 因果律が破れているかを見るには
   - 因果律　判定方法
   - Einstein重力理論
   - Feynman diagramによる計算

2. 因果律の破れ
   - R^2 を含む重力理論 （Gauss-Bonnet重力理論）
   - R^3 を含む重力理論

3. 問題の解決法
   - spin 2の場合
   - spin J>2の場合

4. まとめ

Gauss-Bonnet重力理論



Gauss-Bonnet重力理論では因果律が破れているか

Gauss-Bonnet作用

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int d^D x\sqrt{-g}(R + \alpha_2[R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2])$$

運動方程式

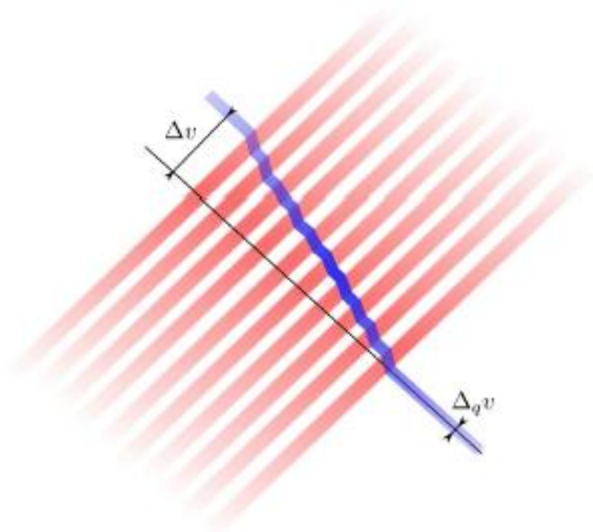
$$\left(\partial_u\partial_v + (h\delta_{ik} + 4\alpha_2\partial_i\partial_k h)\partial_v^2\frac{\epsilon_{ik}\epsilon_{jk}}{\epsilon\cdot\epsilon}\right)\delta h_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta h_{ij} \propto \epsilon_{ij} exp\left[-i\underbrace{\left(1 + 4\alpha_2\frac{\epsilon_{ik}\epsilon_{jk}}{\epsilon\cdot\epsilon}\partial_i\partial_j\right)\frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}}\frac{G|P_u|}{b^{D-4}}}_{\Delta v}p_v\right]$$

$$\Delta v = \frac{4\Gamma(\frac{D-4}{2})}{\pi^{\frac{D-4}{2}}}\frac{G|P_u|}{b^{D-4}}\left(1 + \frac{4\alpha_2(D-4)(D-2)}{b^2}\left(\frac{(\epsilon\cdot n)^2}{\epsilon\cdot\epsilon} - \frac{1}{D-2}\right)\right)$$

0のときtime advance!

任意の重力理論で問題が生じるか



$$\psi \to (1 + i\delta)\psi$$

$$\Rightarrow \quad e^{iN\delta}\psi = e^{i\Delta v p_v}\psi$$

Time advanceが生じる

$\psi \to (1 + i\delta)\psi$ が成り立つδの範囲

$$|\delta| \ll 1$$

$$N \ll sb^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{sb^2} \ll |\delta| \ll 1$$

R^3 を含む重力理論

$$S = \frac{1}{l_p^{D-2}} \int d^D x \sqrt{-g}[R + \alpha_2 (R^2_{\mu\nu\rho\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2) + \alpha_4 (R^3 + \cdots)]$$

必要なvertex

$$A_{ggg} = \sqrt{32\pi G}[A_R + \alpha_2 \underbrace{A_{R^2}}_{=0} + \alpha_4 A_{R^3}]$$

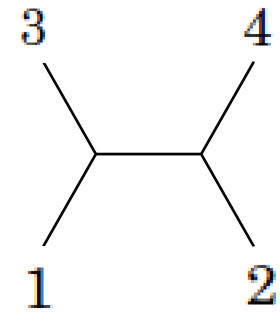
$$\delta \simeq Gs(\boxed{e_1^{ij} e_{3ij}} + \alpha_2 \boxed{e_1^{ij} e_{3i}^{k} \partial_{b^j} \partial_{b^k}} + \alpha_4 \boxed{e_1^{ij} e_3^{kl} \partial_{b^i} \partial_{b^j} \partial_{b^k} \partial_{b^l}})$$
$$\times (e_2^{ij} e_{4ij} + \alpha_2 e_2^{ij} e_{4i}^{k} \partial_{b^j} \partial_{b^k} + \alpha_4 e_2^{ij} e_4^{kl} \partial_{b^i} \partial_{b^j} \partial_{b^k} \partial_{b^l}) \frac{1}{|b|^{D-4}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \delta_{D>4} \\ \delta_{D=4} \end{cases}$$

4次元の場合では

$$log \frac{L}{b}$$

R^3 を含む重力理論



D>4の場合

$$\bigotimes_{xy}\ :\ e^{xy}=e^{yx}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

他の成分は0

$$\bigoplus_{xy}\ :\ e^{xx}=-e^{yy}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

他の成分は0

Dの多項式

$$\delta_{\underline{\oplus_{xy}}\,\underline{\otimes_{xy}}}\sim Gs\alpha_4^2\frac{1}{b^{D+4}}(negative)\qquad b^4\ll\alpha_4$$

Time advance!

粒子1,3

粒子2,4

$$\delta_{\underline{\otimes_{xy}}\,\underline{\otimes_{yz}}}\sim-\frac{Gs\alpha_2^2}{b^D}2(D-4)(D-3)(D-2)\qquad b^2\ll\alpha_2$$

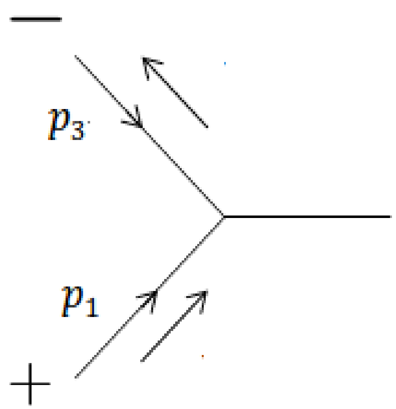
Time advance!

R^3 を含む重力理論

D=4の場合

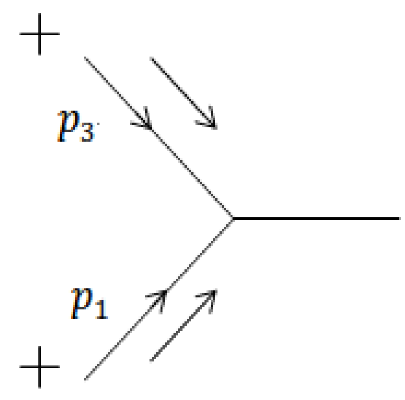
A_R の可能なhelicity

$$(\lambda_1 \lambda_3) = (+-)$$



A_{R^3} の可能なhelicity

$$(\lambda_1 \lambda_3) = (++)$$



スピン+で固定 ⇒ helicity $(+-)$ のみとれる ⇒ 粒子1,3側は A_R のみ

R^3 を含む重力理論

D=4の場合

$$\delta = \begin{pmatrix} log\left(\frac{L}{b}\right) + \frac{48\alpha_4}{|b|^4} & 0 \\ 0 & log\left(\frac{L}{b}\right) - \frac{48\alpha_4}{|b|^4} \end{pmatrix}$$

Time advance!

$$M_{\lambda_4\lambda_2} = \begin{pmatrix} m_{-,+} & m_{-,-} \\ m_{+,+} & m_{+,-} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_a = \frac{1}{2^{1/2}}(\hat{y} + i\lambda_a \hat{z})$$

話の流れ

1. 因果律が破れているかを見るには
   - 因果律　判定方法
   - Einstein重力理論
   - Feynman diagramによる計算

2. 因果律の破れ
   - R^2 を含む重力理論（Gauss-Bonnet重力理論）
   - R^3 を含む重力理論

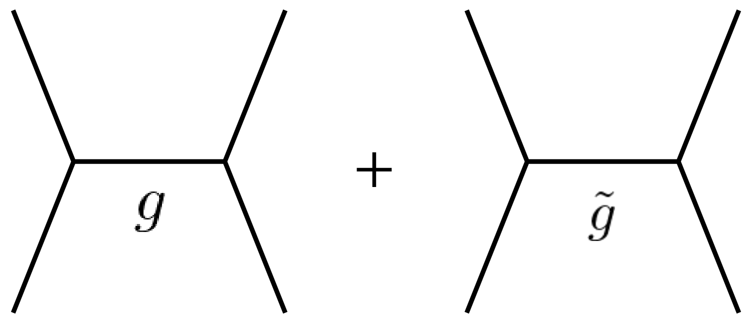
3. 問題の解決法
   - spin 2の場合
   - spin J>2の場合

4. まとめ

spin 2の場合

問題を解決するために

gの他に$\tilde{g}$が飛んでいると考えると・・・



$\tilde{g}$ ：質量m　スピン2

スピン0,1
→問題とは関係ない

・解決できるとは？

$$\delta \equiv \underline{\delta_g} + \delta_{\tilde{g}} > 0$$ →OK！

<0　　>0

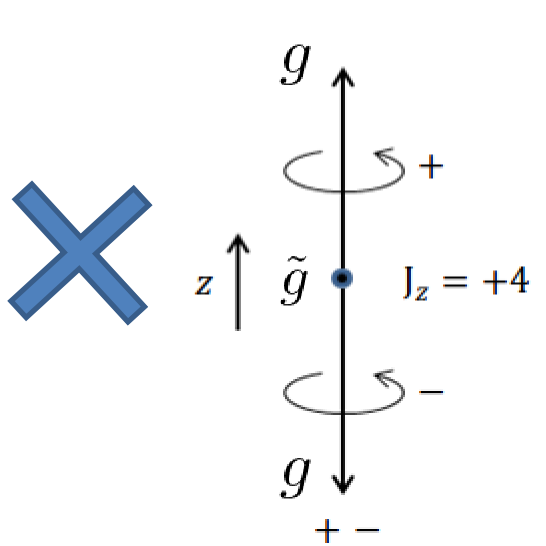
$$\delta_{\tilde{g}} = 4Gs\left[\tilde{\alpha}_2\left(-(e_1\cdot\partial_b)(e_3\cdot\partial_b)(e_1\cdot e_3)+\frac{m^2}{2}(e_1\cdot e_3)^2\right)+\tilde{\alpha}_4\left(-(e_1\cdot\partial_b)(e_3\cdot\partial_b)+\frac{m}{2}(e_1\cdot e_3)\right)^2\right]$$
$$\times\left[\tilde{\alpha}_2\left(-(e_2\cdot\partial_b)(e_4\cdot\partial_b)(e_2\cdot e_4)+\frac{m^2}{2}(e_2\cdot e_4)^2\right)+\tilde{\alpha}_4\left(-(e_2\cdot\partial_b)(e_4\cdot\partial_b)+\frac{m}{2}(e_2\cdot e_4)\right)^2\right]K(mb)$$

spin 2の場合

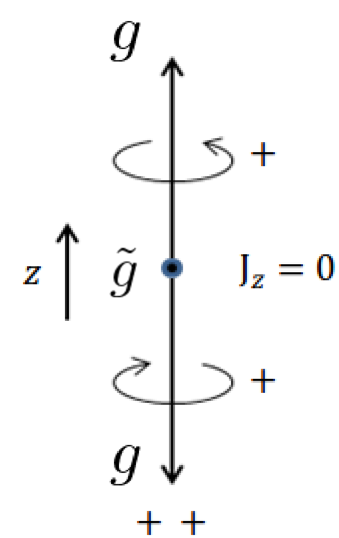
D=4の場合

$\tilde{g}$ が2つのグラビトンに崩壊

$\tilde{\alpha}_2$ term : 可能なhelicity



$\tilde{\alpha}_4$ term : 可能なhelicity



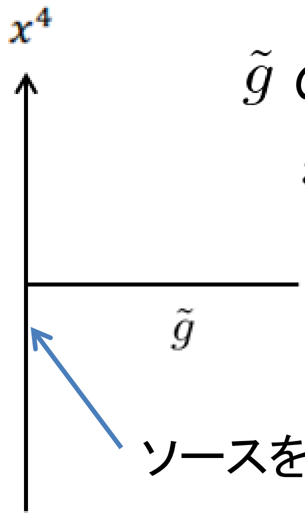
$$\delta^{\tilde{g}}_{\oplus\otimes} = -4Gs \sum_m \tilde{\alpha}_4^2 O_m O_m K(mb) \qquad O_m = \partial^2_{b^x}\partial^2_{b^y} - \frac{m^4}{8}$$

propagator

$$\delta \equiv \underset{<0}{\delta_g} + \underset{<0}{\delta_{\tilde{g}}} \cancel{> 0}$$

spin 2の場合

D>4の場合



$\tilde{g}$ のpropagatorを x^4 で積分

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx^4 \int \frac{d^{D-2}q}{(2\pi)^{D-2}} \frac{1}{q^2+m^2} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

$$= \int \frac{d^{D-3}q'}{(2\pi)^{D-3}} \frac{1}{q'^2+m^2} e^{i\vec{q}'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}$$

ソースを直線上に分布させると・・・　　次元を減らせる

→4次元まで次元を減らせる

→ $\tilde{\alpha}_2$ の寄与を見るためD=5で計算

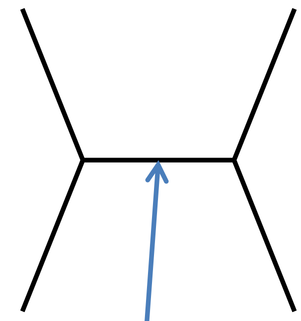
$$\delta^{\tilde{g}}_{\oplus_{xy}\otimes_{yz}} = -Gs \sum_m \tilde{\alpha}_2^2 \frac{b^3m^3+5b^2m^2+12bm+12}{b^5} e^{-mb}$$

$$\delta \equiv \underset{<0}{\delta_g} + \underset{<0}{\delta_{\tilde{g}}} \cancel{> 0}$$

spin J>2の場合

S行列要素

$$S \propto 1 + iGs^{J-1} + \cdots$$



Im(ω)>0で $(\omega = -p_v)$

$$|S(\omega)|^2 \leq 1$$

Unitarity
Causality

が成り立つが…

例 $J = 3$

$$S \propto 1 - 2Gab + \cdots$$

↑ 1より大きい

$$s = a + ib$$
$$a < 0,\ b > 0$$
$$a^2 = b^2$$

結局…

問題を解決するには無限個の粒子が必要
→ストリング理論

まとめ

- $\alpha_2 \sim b^2$ ，$\alpha_4 \sim b^4$ あたりで因果律が破れる問題が生じる
- 粒子を加えても問題を解決することができない
- 解決するには無限個の粒子が必要

  →ストリング理論の有用性を示唆