

The Yang-Mills gradient flow in finite volume

Taniguchi for journal club

Zoltan Fodor, Kieran Holland, Julius Kuti, Daniel Negradi,
Chik Him Wong (JHEP11(2012)007)(1208.1051)

なぜこの論文？

なぜこの論文？

有限温度系のrunning couplingが知りたい。

なぜこの論文？

有限温度系のrunning couplingが知りたい。

Schroedinger functional schemeは使えない。

なぜこの論文？

有限温度系のrunning couplingが知りたい。

Schroedinger functional schemeは使えない。

gradient flowがrunning couplingの定義に使える！

なぜこの論文？

有限温度系のrunning couplingが知りたい。

Schroedinger functional schemeは使えない。

gradient flowがrunning couplingの定義に使える！

徳

1. 特別なセットアップが不要。
 - ただし K_C 上。
2. 手持ちのコードがそのまま使える。
3. 観測量の計算が安い！

なぜこの論文？

なぜこの論文？

不徳

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。
2. 厳密にはstep scaling functionの計算が必要。

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。
2. 厳密にはstep scaling functionの計算が必要。
 - 非摂動論的なrunningが2 loopと一致(偶然)

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。
2. 厳密にはstep scaling functionの計算が必要。
 - 非摂動論的なrunningが2 loopと一致(偶然)
3. $O(a)$ errorが比較的大きい。

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。
2. 厳密にはstep scaling functionの計算が必要。
 - 非摂動論的なrunningが2 loopと一致(偶然)
3. $O(a)$ errorが比較的大きい。
 - コントロール可能

なぜこの論文？

不徳

1. スケールに応じた体積での再計算が必要。
2. 厳密にはstep scaling functionの計算が必要。
 - 非摂動論的なrunningが2 loopと一致(偶然)
3. $O(a)$ errorが比較的大きい。
 - コントロール可能
4. MS schemeへの変換定数が未計算。

非摂動論的なcoupling

非摂動論的なcoupling

1. 摂動展開でcouplingの2次から始まる量を用意

$$\langle O \rangle_{\text{bare}} = g_R^{(\text{MS})}(\mu)^2 C_0 + g_R^{(\text{MS})}(\mu)^4 C_1 + \dots$$

非摂動論的なcoupling

1. 摂動展開でcouplingの2次から始まる量を用意

$$\langle O \rangle_{\text{bare}} = g_R^{(\text{MS})} (\mu)^2 C_0 + g_R^{(\text{MS})} (\mu)^4 C_1 + \dots$$



格子上で計算

非摂動論的なcoupling

1. 摂動展開でcouplingの2次から始まる量を用意

$$\langle O \rangle_{\text{bare}} = g_R^{(\text{MS})} (\mu)^2 C_0 + g_R^{(\text{MS})} (\mu)^4 C_1 + \dots$$

格子上で計算

有限な量

非摂動論的なcoupling

1. 摂動展開でcouplingの2次から始まる量を用意

$$\langle O \rangle_{\text{bare}} = g_R^{(\text{MS})} (\mu)^2 C_0 + g_R^{(\text{MS})} (\mu)^4 C_1 + \dots$$

格子上で計算

有限な量

2. 新しいスキームでのcouplingが定義できる

$$g_R^{(\text{a scheme})} (\mu)^2 = \frac{\langle O \rangle_{\text{bare}}}{C_0}$$

非摂動論的なcoupling

1. 摂動展開でcouplingの2次から始まる量を用意

$$\langle O \rangle_{\text{bare}} = g_R^{(\text{MS})} (\mu)^2 C_0 + g_R^{(\text{MS})} (\mu)^4 C_1 + \dots$$

格子上で計算

有限な量

2. 新しいスキームでのcouplingが定義できる

$$g_R^{(\text{a scheme})} (\mu)^2 = \frac{\langle O \rangle_{\text{bare}}}{C_0}$$

3. MS schemeのcouplingとは摂動展開で繋がる

$$g_R^{(\text{a scheme})} (\mu)^2 = g_R^{(\text{MS})} (\mu)^2 + g_R^{(\text{MS})} (\mu)^4 \frac{C_1}{C_0} + \dots$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field



非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

$$g_R^{(\text{a scheme})}(\mu)^2 = \frac{S_0[A_\mu]}{\Gamma_0[A_\mu]}$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

$$g_R^{(\text{a scheme})}(\mu)^2 = \frac{S_0[A_\mu]}{\Gamma_0[A_\mu]} = g_0^2 + z_1 g_0^4 + \cdots$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

$$g_R^{(\text{a scheme})}(\mu)^2 = \frac{S_0[A_\mu]}{\Gamma_0[A_\mu]} = g_0^2 + z_1 g_0^4 + \cdots$$

0以外にするのが難しい

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

$$g_R^{(\text{a scheme})}(\mu)^2 = \frac{S_0[A_\mu]}{\Gamma_0[A_\mu]} = g_0^2 + z_1 g_0^4 + \cdots$$

0以外にするのが難しい

そこで、Dirichlet BC

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

有効作用

$$\Gamma_0[A_\mu] = \frac{1}{g_R(\mu)^2} C[A_\mu] = \frac{1}{g_0^2} S_0[A_\mu] + S_1[A_\mu] + g_0^2 S_2[A_\mu] + \cdots$$

background field

計算が難しい

$$g_R^{(\text{a scheme})}(\mu)^2 = \frac{S_0[A_\mu]}{\Gamma_0[A_\mu]} = g_0^2 + z_1 g_0^4 + \cdots$$

0以外にするのが難しい

そこで、Dirichlet BC

SF scheme

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

$$\frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

一種の繰り込み群変換


$$\frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

一種の繰り込み群変換

$$\rightarrow \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

粗視化の範囲 $|x| \sim \sqrt{8t}$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

一種の繰り込み群変換

$$\longrightarrow \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

粗視化の範囲 $|x| \sim \sqrt{8t}$

$$B_\mu(x, t) \sim \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{D/2}}$$

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

一種の繰り込み群変換

$$\longrightarrow \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

粗視化の範囲 $|x| \sim \sqrt{8t}$ $B_\mu(x, t) \sim \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{D/2}}$

$O(B_\mu(t))$: 繰り込まれた演算子

非摂動論的なcoupling

そんな物理量の例

gradient flow

$$B_\mu(t=0) = A_\mu$$

一種の繰り込み群変換

$$\rightarrow \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

粗視化の範囲 $|x| \sim \sqrt{8t}$ $B_\mu(x, t) \sim \frac{e^{-x^2/4t}}{(4\pi t)^{D/2}}$

$O(B_\mu(t))$: 繰り込まれた演算子

特にエネルギー密度が重要 $\langle E \rangle = \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a \right\rangle$

非摂動論的なcoupling

$$\langle E(t) \rangle = \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a(t) \right\rangle$$

$$g_R^{\text{a scheme}} (1/\sqrt{8t})^2 = \frac{128\pi^2}{3(N^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle$$

非摂動論的なcoupling

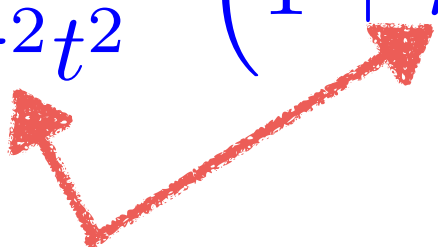
$$\begin{aligned}\langle E(t) \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a(t) \right\rangle \\ &= g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \cdots \right)\end{aligned}$$

$$g_R^{\text{a scheme}} (1/\sqrt{8t})^2 = \frac{128\pi^2}{3(N^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle$$

非摂動論的なcoupling

$$\begin{aligned}\langle E(t) \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a(t) \right\rangle \\ &= g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \dots \right)\end{aligned}$$

有限な係数



$$g_R^{\text{a scheme}} (1/\sqrt{8t})^2 = \frac{128\pi^2}{3(N^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle$$

非摂動論的なcoupling

$$\begin{aligned}\langle E(t) \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a(t) \right\rangle \\ &= g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \dots \right)\end{aligned}$$

有限な係数

gradient flow schemeのrunning coupling

$$g_R^{\text{a scheme}} (1/\sqrt{8t})^2 = \frac{128\pi^2}{3(N^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle$$

非摂動論的なcoupling

$$\begin{aligned}\langle E(t) \rangle &= \left\langle \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a(t) \right\rangle \\ &= g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \dots \right)\end{aligned}$$

有限な係数

gradient flow schemeのrunning coupling

$$g_R^{\text{a scheme}} (1/\sqrt{8t})^2 = \frac{128\pi^2}{3(N^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle$$

MS schemeへの接続もOK!

格子上のcouplingの問題

window problem

runningに合わせて体積を変える

格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1$

runningに合わせて体積を変える

格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

runningに合わせて体積を変える

格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1$

runningに合わせて体積を変える

格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{L}{a} > 80$

runningに合わせて体積を変える

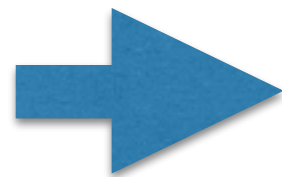
格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{L}{a} > 80$

解決策



runningに合わせて体積を変える

格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{L}{a} > 80$

解決策

1. 大きな格子に小さなrunning

runningに合わせて体積を変える

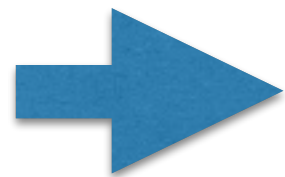
格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{L}{a} > 80$

解決策



1. 大きな格子に小さなrunning

2. finite volume scheme

runningに合わせて体積を変える

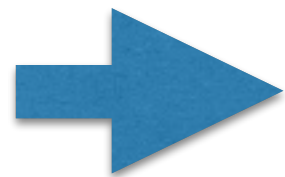
格子上のcouplingの問題

window problem

格子間隔依存性 $\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \rightarrow \frac{t}{a^2} > 8$

有限体積効果 $\frac{\sqrt{8t}}{L} \ll 1 \rightarrow \frac{L}{a} > 80$

解決策



1. 大きな格子に小さなrunning

2. finite volume scheme

$L = c\sqrt{8t}$: fixed

runningに合わせて体積を変える

finite volume gradient flow scheme

finite volume gradient flow scheme

$$L = c\sqrt{8t} : \text{fixed}$$

finite volume gradient flow scheme

$L = c\sqrt{8t}$: fixed

gradient flow $B_\mu(t=0) = A_\mu$ $\frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$

finite volume gradient flow scheme

$L = c\sqrt{8t}$: fixed

gradient flow $B_\mu(t=0) = A_\mu \quad \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$

エネルギー密度を計算する

finite volume gradient flow scheme

$$L = c\sqrt{8t} : \text{fixed}$$

$$\text{gradient flow} \quad B_\mu(t=0) = A_\mu \quad \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

エネルギー密度を計算する

$$\langle E(t) \rangle = g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \cdots \right)$$

finite volume gradient flow scheme

$$L = c\sqrt{8t} : \text{fixed}$$

$$\text{gradient flow } B_\mu(t=0) = A_\mu \quad \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

エネルギー密度を計算する

$$\langle E(t) \rangle = g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \cdots \right)$$

有限体積用の係数を計算する

finite volume gradient flow scheme

$$L = c\sqrt{8t} : \text{fixed}$$

$$\text{gradient flow } B_\mu(t=0) = A_\mu \quad \frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$$

エネルギー密度を計算する

$$\langle E(t) \rangle = g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \cdots \right)$$

有限体積用の係数を計算する

これらの係数の導出

finite volume gradient flow scheme

$L = c\sqrt{8t}$: fixed

gradient flow $B_\mu(t=0) = A_\mu$ $\frac{dB_\mu}{dt} = D_\nu(B)G_{\nu\mu}(B)$

エネルギー密度を計算する

$$\langle E(t) \rangle = g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2 t^2} \left(1 + k_1 g_R^{(\text{MS})} (1/\sqrt{8t})^2 + \dots \right)$$

有限体積用の係数を計算する

これらの係数の導出

この論文の主題

finite volume gradient flow scheme

setup

finite volume gradient flow scheme

setup

L^4 lattice

finite volume gradient flow scheme

setup

L^4 lattice

ゲージ場：全方向周期境界条件

フェルミオン場：全方向反周期境界条件

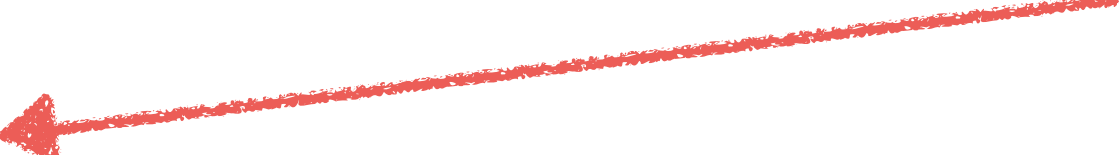
finite volume gradient flow scheme

setup

L^4 lattice ゲージ場：全方向周期境界条件
 フェルミオン場：全方向反周期境界条件

$m_q = 0$

余分なスケールを導入したくない



finite volume gradient flow scheme

setup

L^4 lattice ゲージ場：全方向周期境界条件
 フェルミオン場：全方向反周期境界条件

$m_q = 0$ 余分なスケールを導入したくない

$$c = \frac{\sqrt{8t}}{L} = 0.3 \quad \text{fixed}$$

finite volume gradient flow scheme

計算手法

$$A_{\mu}(x) = B_{\mu} + Q_{\mu}(x)$$

finite volume gradient flow scheme

計算手法

“Background filed method”

$$A_{\mu}(x) = B_{\mu} + Q_{\mu}(x)$$

finite volume gradient flow scheme

計算手法

“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x)$$



constant (zero) mode

finite volume gradient flow scheme

計算手法

“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x)$$

non-zero mode

constant (zero) mode

finite volume gradient flow scheme

計算手法

“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x) \quad \leftarrow \quad \text{non-zero mode}$$

 constant (zero) mode

Quantum fluctuation: $Q_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $c(x)$, $\bar{c}(x)$

finite volume gradient flow scheme

計算手法

“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x) \quad \leftarrow \text{non-zero mode}$$

 constant (zero) mode

Quantum fluctuation: $Q_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $c(x)$, $\bar{c}(x)$

Actionとして、2次の項(Gaussian)のみを残す

finite volume gradient flow scheme

計算手法

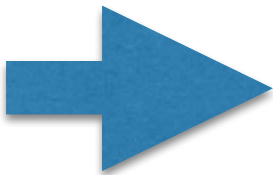
“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x) \quad \leftarrow \text{non-zero mode}$$

 constant (zero) mode

Quantum fluctuation: $Q_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $c(x)$, $\bar{c}(x)$

Actionとして、2次の項(Gaussian)のみを残す

 1 loop補正のみ

finite volume gradient flow scheme

計算手法

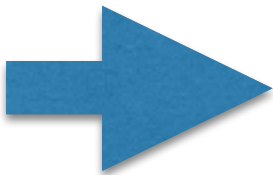
“Background field method”

$$A_\mu(x) = B_\mu + Q_\mu(x) \quad \leftarrow \text{non-zero mode}$$

 constant (zero) mode

Quantum fluctuation: $Q_\mu(x)$, $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $c(x)$, $\bar{c}(x)$

Actionとして、2次の項(Gaussian)のみを残す

 1 loop補正のみ

B_μ は近似なしに積分

finite volume gradient flow scheme

finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

元log発散

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{\varepsilon} - 2.492991 + O(\varepsilon)$$

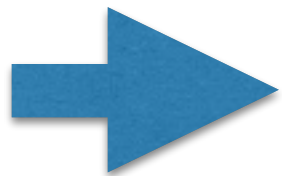
finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

元log発散

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{\varepsilon} - 2.492991 + O(\varepsilon)$$



couplingの繰り込みに吸収

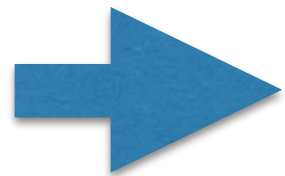
finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

元log発散

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{\varepsilon} - 2.492991 + O(\varepsilon)$$



couplingの繰り込みに吸収

gradient flow

operatorに特有な発散は無い

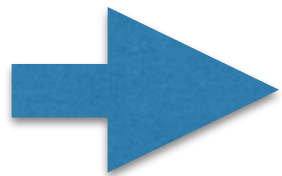
finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

元log発散

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{\varepsilon} - 2.492991 + O(\varepsilon)$$



couplingの繰り込みに吸収

gradient flow

operatorに特有な発散は無い

$$Q_\mu(t) = e^{t\Delta} Q_\mu(0)$$

Laplacian

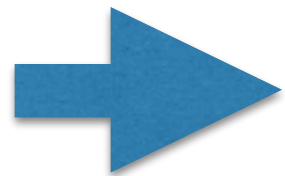
finite volume gradient flow scheme

有限体積の変更点

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \sum_{n \neq 0}$$

元log発散

$$\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{\varepsilon} - 2.492991 + O(\varepsilon)$$



couplingの繰り込みに吸収

gradient flow

operatorに特有な発散は無い

$$Q_\mu(t) = e^{t\Delta} Q_\mu(0)$$

Laplacian

large nはGaussianで抑制

finite volume gradient flow scheme

結果

finite volume gradient flow scheme

結果

$$\langle t^2 E(t) \rangle = g_R^2(\mu) \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2} (1 + \delta)$$

finite volume gradient flow scheme

結果

$$\langle t^2 E(t) \rangle = g_R^2(\mu) \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2} (1 + \delta)$$

$$\delta_a = -\frac{64t^2\pi^2}{3L^4}$$

$$\delta_e = \vartheta^4 \left(\exp \left(-\frac{L^2}{8t} \right) \right) - 1 = 8 \exp \left(-\frac{L^2}{8t} \right) + 24 \exp \left(-\frac{L^2}{4t} \right) + \dots$$

finite volume gradient flow scheme

結果

$$\langle t^2 E(t) \rangle = g_R^2(\mu) \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2} (1 + \delta)$$

$$\delta_a = -\frac{64t^2\pi^2}{3L^4}$$

$$\delta_e = \vartheta^4 \left(\exp \left(-\frac{L^2}{8t} \right) \right) - 1 = 8 \exp \left(-\frac{L^2}{8t} \right) + 24 \exp \left(-\frac{L^2}{4t} \right) + \dots$$

Jacobi楕円関数

finite volume gradient flow scheme

結果

$$\langle t^2 E(t) \rangle = g_R^2(\mu) \frac{3(N^2 - 1)}{128\pi^2} (1 + \delta)$$

$$\delta_a = -\frac{64t^2\pi^2}{3L^4}$$

$$\delta_e = \vartheta^4 \left(\exp\left(-\frac{L^2}{8t}\right) \right) - 1 = 8 \exp\left(-\frac{L^2}{8t}\right) + 24 \exp\left(-\frac{L^2}{4t}\right) + \dots$$

Jacobi楕円関数

running coupling

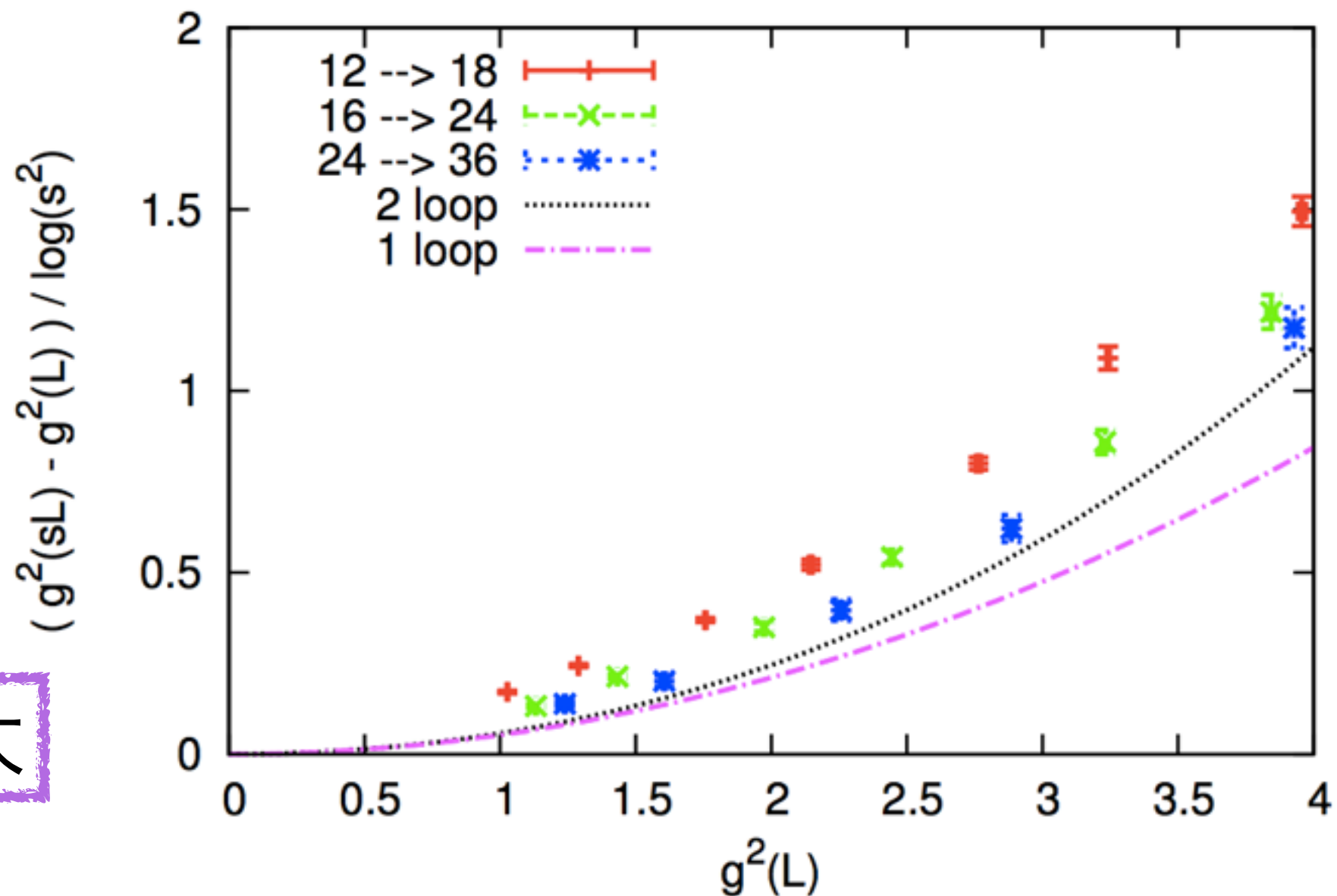
$$g_c^2(L) = \frac{128\pi^2 \langle t^2 E(t) \rangle}{3(N^2 - 1)(1 + \delta(c))}$$

finite volume gradient flow scheme

- improved Symanzik action
- APE stout smeared staggered fermion
- $N_f=4$, massless

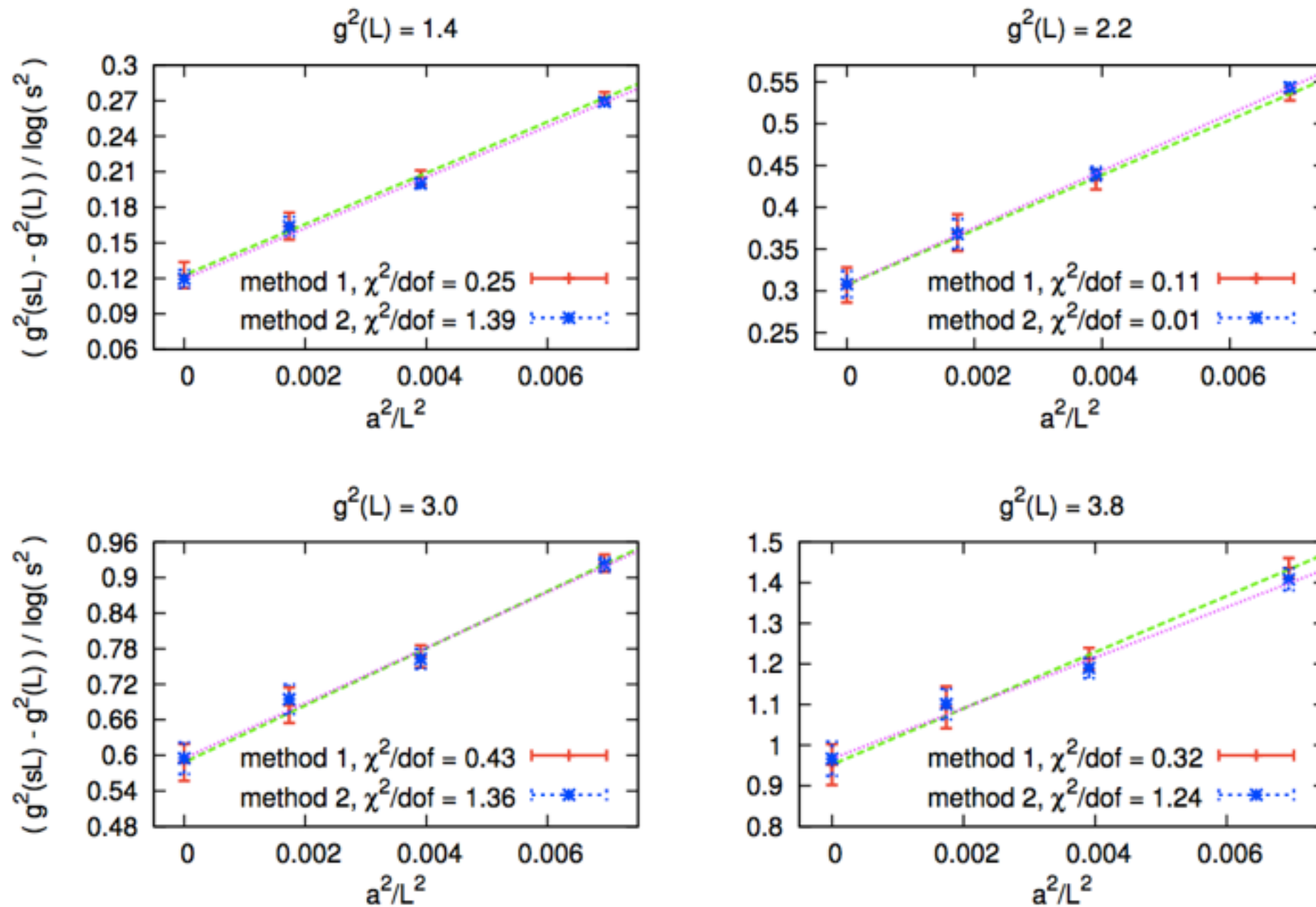
step scaling
function

格子間隔依存性大



finite volume gradient flow scheme

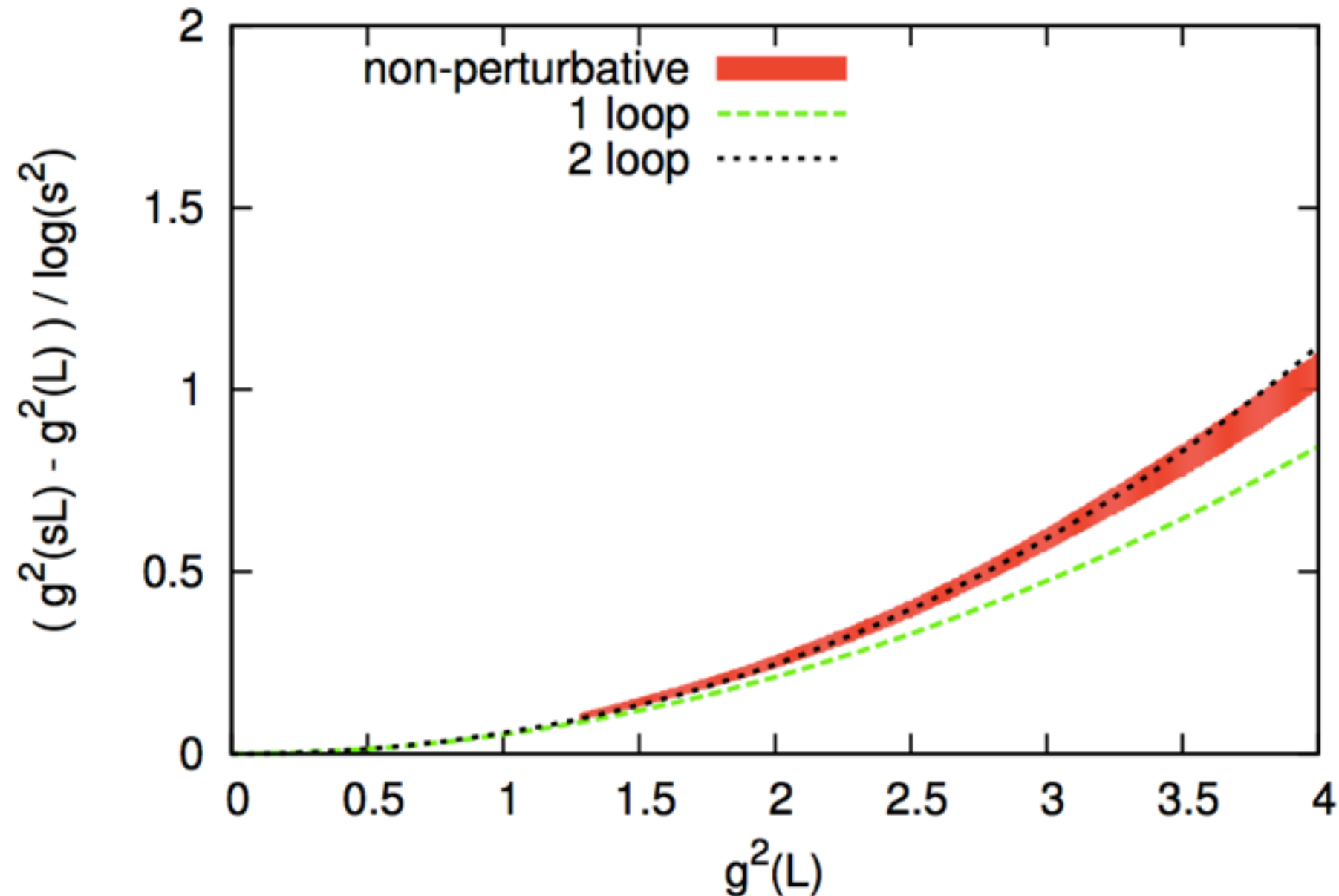
連続極限



一応コントロール可能

finite volume gradient flow scheme

非摂動論的繰り込み群flow



2 loop running と consistent

楽々 α_s 計画？

手持ちのゲージ配位で楽して α_s を測れないか？

1. 手持ちの配位で coupling を測定する
 - fermion の境界条件が異なる
 - quark 質量が physical point にある
2. 非摂動論的な running で摂動的領域まで走る
 - scheme が異なるのでやり直し？
3. 摂動展開の式を使って Λ_{QCD} を求める
4. $\overline{\text{MS}}$ scheme への乗り換えもできる
 - 接続係数が未計算
5. $O(a)$ error の評価～within statistical error?

楽々 α s 計画？

楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要があるのか？

楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

$\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \ll \frac{L}{\sqrt{8t}}$ の条件を実現？

楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

$\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \ll \frac{L}{\sqrt{8t}}$ の条件を実現？

$O(a)$ errorの評価

連続極限の図

楽々 αs 計画？

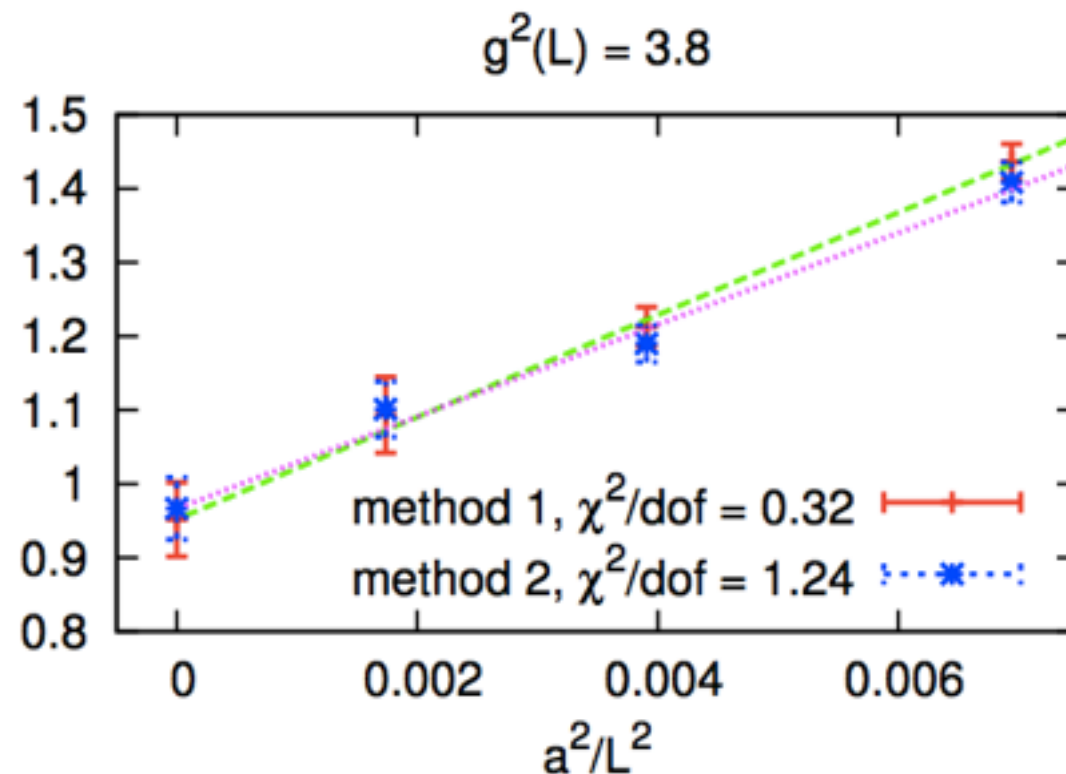
そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

$\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \ll \frac{L}{\sqrt{8t}}$ の条件を実現？

$O(a)$ errorの評価

連続極限の図



楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

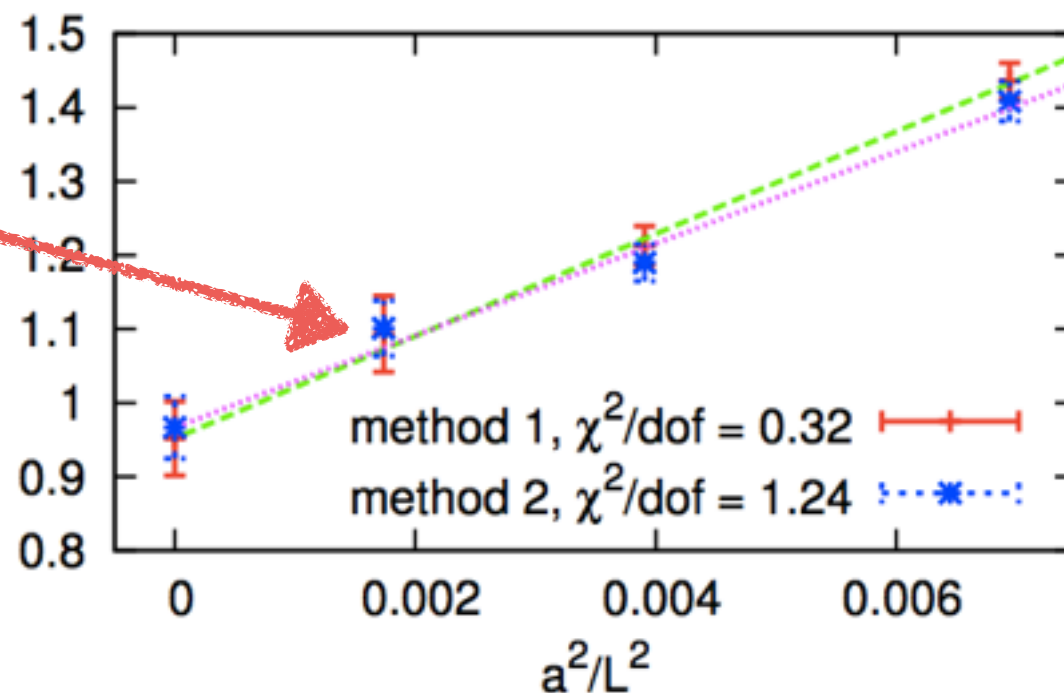
$\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \ll \frac{L}{\sqrt{8t}}$ の条件を実現？

$O(a)$ errorの評価

連続極限の図

$g^2(L) = 3.8$

$\frac{a}{\sqrt{8t}} \sim 0.14$



楽々 αs 計画？

そもそも有限体積schemeに拘る必要はあるのか？

我々の最大格子 = 96^4

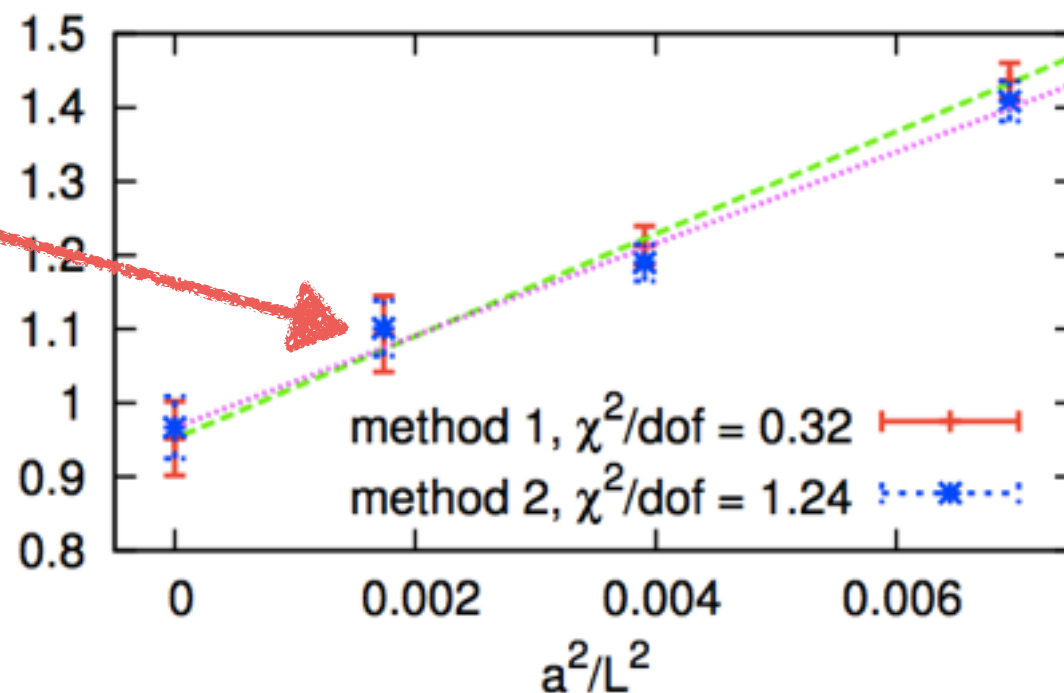
$\frac{a}{\sqrt{8t}} \ll 1 \ll \frac{L}{\sqrt{8t}}$ の条件を実現？

$O(a)$ errorの評価

連続極限の図

$g^2(L) = 3.8$

$\frac{a}{\sqrt{8t}} \sim 0.14$



$O(a) \sim 5\%$

楽々 α_s 計画？

- 有限体積schemeを適用可能
 - 格子の形状が異なる
 - fermionの境界条件が異なる
 - quark質量を0にできるか？
- step scaling functionの測り直し？
 - もしかしたら2 loop runningとconsistent?
- $\overline{\text{MS}}$ schemeへの接続係数は要計算

楽々 α_s 計画？

有限温度系のrunning coupling?

- 有限体積schemeを適用可能
 - 格子の形状が異なる
 - fermionの境界条件が異なる
 - quark質量を0にできるか？
- step scaling functionの測り直し？
 - もしかしたら2 loop runningとconsistent?
- $\overline{\text{MS}}$ schemeへの接続係数は要計算